ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Éxpérimentales

Session : normal juin 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Éxpérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Étude dune fonction numérique et calcul intégral et suites** **11 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) pasant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(2;0;2)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

0,75 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1;1;0)$ est le point de contact .

0,25 pt **2 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).

0,75 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) au point $C(1;1;0)$.

0,75 pt **3 -** Montrer que : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OBC .

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 8 boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4 (Les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, simultanément trois boules de l'urne.

1,5 pt **1 -** Soit A l'événement : "Parmi les trois boules tirées , aucune ne porte le nombre 0"

Soit B l'événement : "le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8 "

Montrer que : $p(A)=\dfrac{5}{14}$ et que : $p(B)=\dfrac{1}{7}$.

2 - Soit X le variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$.

1 pt **b)** Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Recopier sur votre copier et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Exercice 3 : (3 pts)

On considère les nombres complexes a et b tels que : $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que $b=(1+i)a$.

0,5 pt **b)** En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

0,5 pt **c)** Déduire ce qui précède que : $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c tel que : $c=-1+i\sqrt{3}$

Yassine Elamri

Today yesterday tomorrow better than today

0,75 pt **a)** Vérifier que : $c = ia$ et en déduire que $OA = OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

0,5 pt **b)** Montrer que le point B l'image du point par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

0,5 pt **c)** En déduire que la quadrilatère $OABC$ est un carré

Problème : (11 pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0,5 pt **1 -** Vérifier que : $g(1) = 0$.

0,25 pt **2 -** À partir du tableau de variation ci-contre :.

Montrer que $g(x) \leqslant 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $]0;1]$ et pour $g(x) > 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $[1;+\infty[$

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + (1 - \frac{2}{x})\ln x$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $1cm$.

0.5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0,75 pt **b)** Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

1 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation : $(1 - \frac{2}{x})\ln x = 0$.

0.5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées .

c) Montrer que $f(x) \leqslant x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;2]$ et en déduire la

0,75 pt position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1;2]$.

5 - Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) (On admettra la courbe

1 pt (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).

0.5 pt **6 - a)** Montrer que : $\int_1^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

0.25 pt **b)** Montrer que la fonction : $H : x \longrightarrow 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longrightarrow \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x dx = (1 - \ln 2)^2$.

0.5 pt **d)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

III) Considérons la suite numérique (u_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Yassine Elamri

$u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **1 -** Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.(On pourra utiliser le résultat du question II) 4-c)

0.75 pt **3 -** Déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite..

Yassine Elamri

FIN