# Étude des fonctions

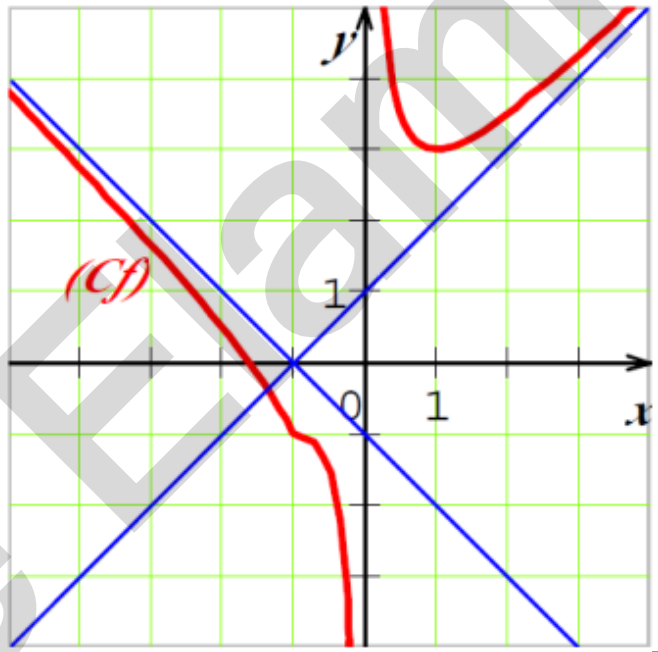


## Série d'exercices

### Exercice : 1

On considère ci-dessous la courbe dune fonction $f$

1. Donner $D_f$puis déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$
2. Déterminer les branches infinies de $D_f$.
3. Déterminer $f'(1)$ .
4. La fonction $f$ est-elle dérivable en $-1$ ?
5. Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant le signe de $f'$.




### Exercice : 2

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\frac{2x^2-7x+8}{x-2}$. Et soit $(C_f)$ sa courbe d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   c. Calculer $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.
2. a. Montrer que : $(\forall x\in D_f)\,;f'(x)=\frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.
   b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $D_f$, puis dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$.
3. a. Vérifier que : $(\forall x\in D_f)\,;f(x)=2x-3+\frac{2}{x-2}$
   b. Déduire que la droite $(D)$ d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
4. Tracer la courbe $(C_f)$.
5. Soit la fonction $g$ définie par $g(x)=\frac{2x^2-7|x|+8}{|x|-2}$.
   a. Déterminer $D_g$.



Yassine Elamri

b Étudier la parité de $g$.
c Montrer que $\forall x \in [0;2[\cup]2;+\infty[ : g(x) = f(x)$.
d En déduire une construction de $(C_a)$

## Exercice : 3

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2-7x+8}{x-2}$. Et soit $(C_f)$ sa courbe d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 a Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
b Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c Calculer $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

2 a Montrer que : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.
b Etudier le signe de $f'(x)$ sur $D_f$, puis dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$.

3 a Vérifier que : $(\forall x \in D_f) ; f(x) = 2x-3+\frac{2}{x-2}$
b Déduire que la droite $(D)$ d'équation $y = 2x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

4 Tracer la courbe $(C_f)$.

5 Soit la fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{2x^2-7|x|+8}{|x|-2}$.
a Déterminer $D_g$.
b Étudier la parité de $g$.
c Montrer que $\forall x \in [0;2[\cup]2;+\infty[ : g(x) = f(x)$.
d En déduire une construction de $(C_g)$.

## Exercice : 4

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+1}{x^2}$. Et soit $(C_f)$ sa courbe d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 Déterminer $D_f$.
2 Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
3 a Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
b Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique à la courbe $(C_f)$.



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

c Etudier la position relative de la courbe $(C_f)$ par rapport à la droite $(D)$ sur $D_f$.

4 a Montrer que $(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$.

b Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

5 a Montrer que $(\forall x \in D_f) : f''(x) = \frac{6-2x}{x^4}$.

b Etudier la concavité de $(C_f)$ et Montrer que $(C_f)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.

6 Construire $(D)$ et $(C_f)$.

## Exercice : 5

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$. Et soit $(C_f)$ sa courbe d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 a Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

b Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c Montrer que la droite $(D) : y = x-2$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et la droite $(D') : y = -x+2$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ à la courbe $(C_f)$.

2 Vérifier que la droite $(\Delta) : x = 2$ est un axe de symétrie de $(C_f)$.

3 Etudier la dérivabilité de $f$ à gauche en 1 et à droite en 3 , puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

4 a Montrer que $(\forall x \in D_f \setminus \{1;3\}) : f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

b Etudier les variations de $f$, puis dresser son tableau de variations.

5 Construire $(\Delta), (D), (D')$ et $(C_f)$.

## Exercice : 6

Soient $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$ et $(C_f)$ sa courbe d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \frac{\pi}{4}$ et $\|\vec{j}\| = 1$.

1 Montrer que $f$ est périodique de période $\pi$.

2 Etudier la parité de $f$.

3 Vérifier que la droite $(\Delta) : x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de $(C_f)$.

4 Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la fonction $f$ sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ ?

5 a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

b Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $I$.

6 Construire $(C_f)$ sur $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

## Exercice : 7

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 1 & ; x \geq 0 \\ x + \frac{1}{x-1} & ; x \leq 0 \end{cases}$.

1 Déterminer $D_f$ puis calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 Etudier les branches infinies de $(C_f)$.

3 Etudier la dérivabilité de $f$ en 0 , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4 a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

b Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

5 Construire $(C_f)$.

Yassine Elamri





Today better than yesterday, tomorrow better than today