Chapitre

Étude des fonctions

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
• On se limitera à la détermination de limites de fonctions simples (fonctions polynômes du second degré ou du troisième degré ou de fonctions de la forme : $x \to ax+b+\varphi(x)$ où $\lim \varphi(x) = 0$) aux bornes de son domaine de définition et on déterminera aussi les branches infinies de leurs courbes représentatives • On étudiera des fonctions dont le calcul de la dérivée et l'étude de son signe ne posent pas trop de difficultés • On traitera la résolution graphique d'équations et d'inéquations de la forme : $f(x) = c \quad ; \quad f(x) \leq c \quad ; \quad f(x) = g(x)$ $f(x) \leq g(x) \quad ; \quad f(x) < g(x)$ où f et g sont des fonctions figurant au programme ,dans des cas où la résolution algébrique n'est pas simple.	• Résoudre graphiquement des équations et des inéquations • Utiliser la périodicité et les éléments de symétrie dune courbe pour réduire le domaine détude dune fonction • Utiliser le signe de la dérivée seconde pour étudier la concavité dune courbe et déterminer ses points dinflexion • Etudier et représenter des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles. • Etudier et représenter des fonctions trigonométriques simples.

Yassine Elamri

Avant propos

L'étude des fonctions numériques est importante dans tous les domaines des mathématiques pures et appliquées, y compris les mathématiques appliquées à l'économie, à la finance et aux affaires. Par exemple, le langage de l'analyse économique regorge de termes tels que les fonctions d'offre et de demande, les fonctions de coût, les fonctions de production et les fonctions de consommation.

Donc, dans ce chapitre, nous allons introduire quelques concepts majeurs tels que les asymptotes, les branches paraboliques, la convexité et l'axe de symétrie, qui nous sont utiles pour étudier le comportement de n'importe quelleăfonction.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

I Branches infinies :

Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Définition

Soient f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative.
On dit que (C_f) admet une branche infinie si l'un des coordonnées d'un point de (C_f) tend vers l'infini.

1 Asymptote verticale - Asymptote horizontale :

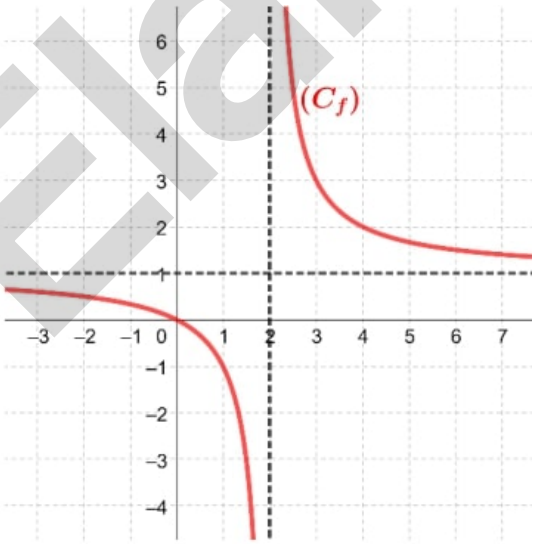
Activité

1 a Calculer limites de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

b Que peut-on dire sur (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$?

2 a Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

b Que peut-on dire sur (C_f) au voisinage de 2 ?



Définition

Soient f une fonction numérique et a et b deux nombres réels.

- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est **une asymptote verticale** à la courbe (C_f).
- Si $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b$, alors on dit que la droite d'équation $y = b$ est **une asymptote horizontale** à la courbe (C_f) au voisinage de ∞.

• Exemple

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x^2+x-2}{x^2-4}$.

- On a $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3x^2+x-2}{x^2-4} = +\infty$ alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
- Et on a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2+x-2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$. Donc (C_f) admet une asymptote

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

horizontale d'équation $y = 3$ au voisinage de $+\infty$.

Application

On considère f la fonction définie par son tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe de f.

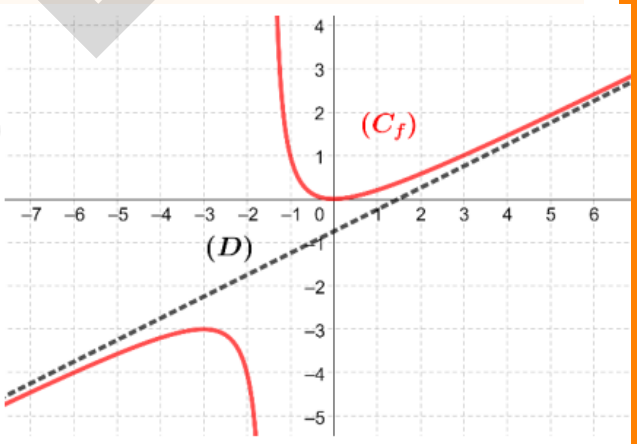
2 Asymptote oblique

Dans ce paragraphe, f étant une fonction qui admet une limite infinie au voisinage de ∞.

Activité

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$ et (D) est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

1. Calculer limites de f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)$.
3. Que peut-on dire sur (C_f) et la droite (D) ?



Définition

Soient a et b deux réels tels que $(a \neq 0)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$), alors on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$).

Propriété

La droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si et seulement s'il existe une fonction h telle que $f(x) = ax+b+h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ (respectivement $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$).

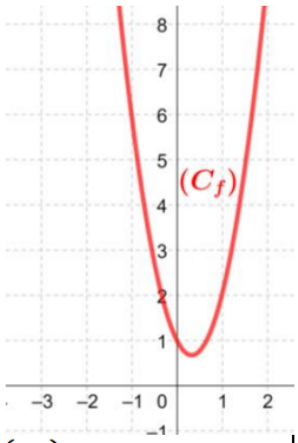
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

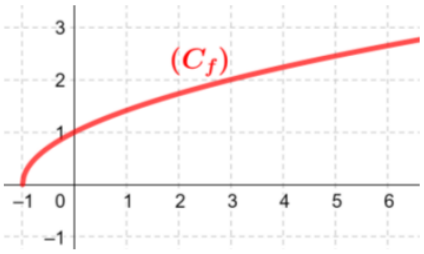
Exemple

au voisinage de ∞.

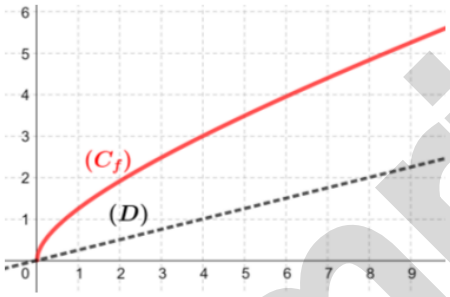
https://steinmath.com better than yesterday, tomorrow better than today



(C_f)admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



(C_f)admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.



(C_f)admet une branche parabolique de direction la droit (D).

• Exemple

On considère f, g et h les fonctions définies respectivement par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $g(x) = \sqrt{3x-2}$ et $h(x) = 2x^2 + \sqrt{x}$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 2x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x} = +\infty$.

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3x-2}{x^2}} = 0$.

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application

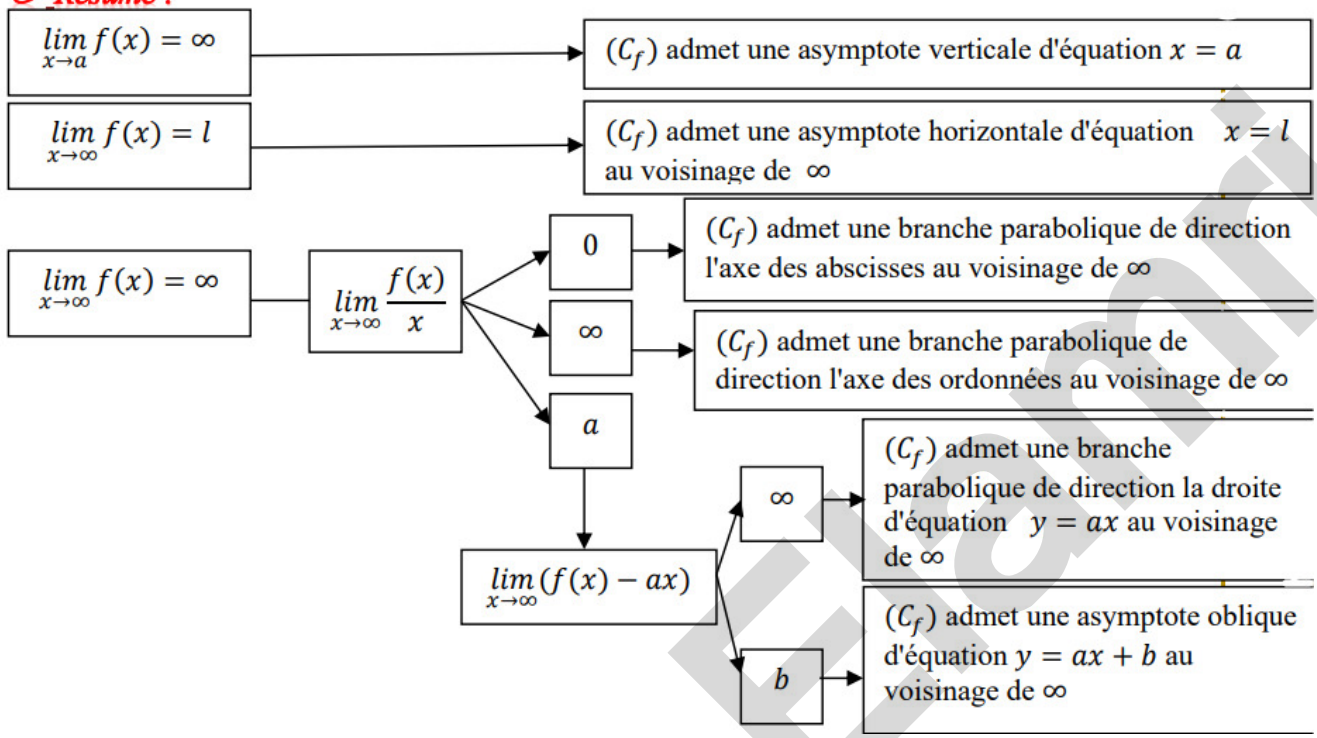
Déterminer la branche parabolique de (C_f) au voisinage $+\infty$ de dans chacun des cas suivants

1 $f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$ 2 $f(x) = \sqrt{x+1} - 2x$ 3 $f(x) = \frac{2x-5}{\sqrt{x}+3}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Résumé :



II Concavité d'une courbe - points d'inflexion :

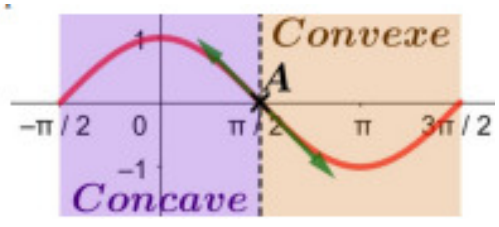
Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On dit que (C_f) est :

- On dit que (C_f) est convexe (ou admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives), si (C_f) est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes. - On dit que (C_f) est concave (ou admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives), si (C_f) est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes. - $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) si la courbe traverse sa tangente en ce point. O

• Exemple

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction cosinus sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.
La fonction cosinus est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un point d'inflexion de $(C_{\cos})$.



Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

Un point d'inflexion est un point de (C_f) où la courbe (C_f) change de concavité.

Définition

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

- Si f'' est positive suor l'intervalle I, alors (C_f) est convexe
- Si f'' est négative sur l'intervalle I, alors (C_f) est concave.
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $A(a; f(a))$ est u point d'inflexion de (C_f).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

Etudions la concavité de (C_f) en précisant les points d'inflexion.

Application

Etudier la concavité de courbe de la fonction f en précisant les points d'inflexion s'ils existent dans chacun des cas suivants :

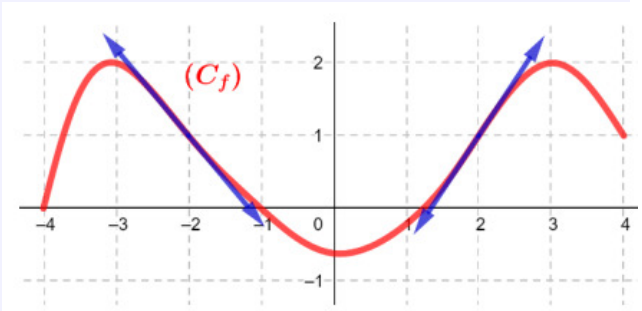
1 $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 3x + 5$

2 $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

Application

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4;4]$.

Etudier la concavité de courbe de la fonction f en précisant les points d'inflexion s'ils existent.



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Éléments de symétrie d'une courbe :

1 Axe de symétrie :

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

La droite (Δ) d'équation $x=a(a\in\mathbb{R})$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :
$$\begin{cases}(\forall x\in D);\quad (2a-x)\in D\\ (\forall x\in D);\quad f(2a-x)=f(x)\end{cases}.$$

• Exemple

Montrons que la droite d'équation $(\Delta):x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x)=x^2+x+1$.

Application

Montrer que la droite (D) est un axe de symétrie de (C_f) dans chacun des cas suivants :

- $f(x)=\frac{-3}{x^2-4x+7}$ et $(D):x=2$.
- $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ et $(D):x=\frac{5}{2}$.

IV Centre de symétrie :

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Le point $\Omega(a;b)$ tel que $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ est **un centre de symétrie** de la courbe (C_f) si et seulement si :
$$\begin{cases}(\forall x\in D);\quad (2a-x)\in D\\ (\forall x\in D);\quad f(2a-x)+f(x)=2b\end{cases}.$$

• Exemple

Montrons que le point $\Omega(1;1)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Montrer que le point Ω est un centre de symétrie de (C_f) dans chacun des cas suivants :

- $f(x)=\frac{-2x^2+7x-5}{2x-1}$ et $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.
- $f(x)=2x^3+6x^2+3x+3$ et $\Omega(-1;4)$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today