Les équations

I Équation du premier degré à une inconnue

Activité

☆ Quel nombre si nous y ajoutons 3 nous obtenons 16 ?
☆ Quel nombre si on en soustrait 8 on obtient 2 ?
☆ Quel nombre si nous le multiplions par 3 nous obtenons 33 ?
☆ Trouver le nombre dont le tiers est 24 ?

Définition

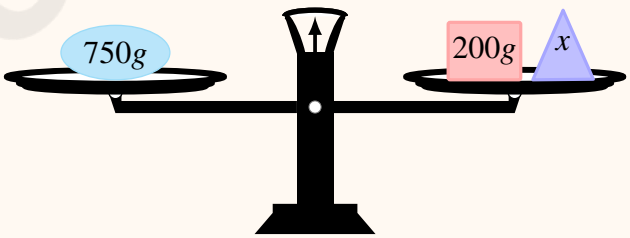
Soient a, b et x trois nombres rationnels
Toute égalité de la forme $a+x=b$ ou de la forme $ax+b=0$ s'appelle équation du premier degré à une inconnue x
La valeur de x qui vérifie l'équation s'appelle solution de l'équation

1 Résolution de l'équation $a+x=b$

Activité

La balance, dessous, étant en équilibre

1. Écrire l'équation d'équilibre.
2. Déterminer la valeur de l'inconnu x



Règle

Soient a et b deux nombres rationnels (a $\neq$0)
La solution de l'équation $x+a=b$ est $b-a$

Yassine Elamri

EXEMPLES

☆ L'équation $x+\frac{3}{4}=11$ est respectivement équivalente à :

$x=11-\frac{3}{4}$

$x=\frac{44}{4}-\frac{3}{4}$

$x=\frac{44-3}{4}$

$x=\frac{41}{4}$

Donc cet équation admet une seule solution $\frac{41}{4}$

☆ L'équation $3+x=-5$ est respectivement équivalente à :

$x=-5-3$

$x=-8$

Donc cet équation admet une seule solution -8

2 Résolution de l'équation $ax+b=0$

Activité

L'aire d'un terrain rectangulaire est $370m^2$, sa longueur est x et sa largeur est $10m$

1 Écrire l'égalité qui vérifie l'aire de ce terrain

2 Déterminer la longueur du terrain

Règle

Soient a et b deux nombres rationnels ($a \neq 0$)

☆ Si $a \neq 0$, alors $\frac{-b}{a}$ est la solution de cet équation

☆ Si $a=0$, alors cet équation n'admet pas de solution

☆ Si $a=0$ et $b=0$, alors tout nombres rationnels est solution de cet équation

Remarque

★ Résoudre une équation c'est trouver la valeur de l'inconnue x qui vérifie cet équation

☆ ***Technique générale*** :

- Pour résoudre une équation, en regroupe les termes qui contiennent l'inconnue x dans un coté, et les termes connus dans l'autre coté, à condition de changer le signe du terme déplacé
- La multiplication se transforme en division et la division se transforme en multiplication sans changer le signe

Yassine Elamri

EXEMPLES

☆ L'équation $2x+7=x-1$ est respectivement équivalente à :
$2x-x=-1-7$
$x=-8$
Donc cet équation admet une seule solution -8

☆ L'équation $3x-11=3x-5$ est respectivement équivalente à :
$3x-3x=-5+11$
$0x=-6$
Ce qui est impossible
Donc cet équation n'a pas de solution

☆ L'équation $2x+8=2(x+4)$ est respectivement équivalente à :
$2x+8=2x+8$
$2x-2x=8-8$
$0x=0$
Ce qui est vrai
Donc tous les nombres rationnels sont solutions de cet équation

☆ L'équation $5x+6=6$ est respectivement équivalente à :
$5x=6-6$
$5x=0$
$x=0$
Donc cet équation admet une seule solution 0

a Techniques de résolution

Cas 1 : Développement

Technique

Pour résoudre ce genre d'équation, on enlève les parenthèses en utilisant la règle du développement ou bien en supprimant les parenthèses précédées par le signe $+$ ou le signe $-$

• Exemple

L'équation $2(3x+9)-3x=12-(2-4x)$ est respectivement équivalente à :
$6x+18-3x=12-2+4x$
$6x-3x-4x=12-2-18$
$-x=-8$
$x=8$
Donc cet équation admet une seule solution 8

Cas 2 : Équation avec fraction

Technique

Pour résoudre ce genre d'équation, on réduit au même dénominateur dans les deux cotés de l'équation ou par la règle de produit des deux cotés égale au produit des deux milieux (règle de croix)

Yassine Elamri

• Exemple

L'équation $\dfrac{3x-1}{2}-1=\dfrac{x+2}{3}$
est respectivement équivalente à :
$\dfrac{3(3x-1)}{2\times 3}-\dfrac{6}{6}=\dfrac{2(x+2)}{3\times 2}$
$\dfrac{3(3x-1)-6}{6}=\dfrac{2(x+2)}{6}$
$3(3x-1)-6=2(x+2)$
$9x-3-6=2x+4$
$9x-2x=4+3+6$
$7x=13$
$x=\dfrac{13}{7}$
Donc cet équation admet une seule solution $\dfrac{13}{7}$

Cas 3 : Produit nul (équation de la forme $(ax+b)(cx+d)=0$)

Règle

Les solutions d'une équation de la forme $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions des deux équations $ax+b=0$ et $cx+d=0$

Remarque

- On obtient deux solutions ou plus selon le nombre de facteurs
- $(ax+b)^2=0$ est équivalente à $ax+b=0$

• Exemple

L'équation $(3x-5)(6x+4)=0$ est respectivement équivalente à :
$3x-5=0$ ou $6x+4=0$
$3x=5$ ou $6x=-4$
$x=\dfrac{5}{3}$ ou $x=\dfrac{-4}{6}$
$x=\dfrac{5}{3}$ ou $x=\dfrac{-2}{3}$
Donc cet équation admet deux solutions $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{-4}{6}$

Cas 4 : Équation et factorisation

Technique

Pour résoudre une équation du second degré ou plus, on factorise par le facteur commun ou on utilisant les identités remarquables pour l'écrire sous forme de produit nul, puis on applique la régle précédente (Cas 3)

Yassine Elamri

• Exemple

L'équation $3(x+2)-x(x+2)=0$ est respectivement équivalente à :
$(x+2)(3-x)=0$
$x+2=0$ ou $3-x=0$
$x=-2$ ou $x=3$
Donc cet équation admet deux solutions -2 et 3

Remarque

Parfois on aura besoin d'une double factorisation, cela dans le cas ou le facteur commun n'apparait pas au premier coup d'oeil d'il

EXEMPLES

① L'équation $(x-1)(x+3)+x^2-1=0$ est respectivement équivalente à :
$(x-1)(x+3)+(x-1)(x+1)=0$
$(x-1)(x+3+x+1)=0$
$(x-1)(2x+4)=0$
$x-1=0$ ou $2x+4=0$
$x=1$ ou $2x=-4$
$x=1$ ou $x=\dfrac{-4}{2}$
$x=1$ ou $x=-2$
Donc cet équation admet deux solutions 1 et -2

② L'équation $25x^2+30x+9=0$ est respectivement équivalente à :
$(5x)^2+2\times(5x)\times 3+3^2=0$
$(5x+3)^2=0$
$5x+3=0$
$5x=-3$
$x=\dfrac{-3}{5}$
Donc cet équation admet une seuls solution $\dfrac{-3}{5}$

II Résolution des problèmes

Activité

Le périmètre d'un triangle, dont les longueurs de ses cotés sont des nombres entiers naturel, est $30m$
Déterminer les longueurs de ses cotés

Yassine Elamri

Règle

Pour résoudre un problème, on suit les étapes suivantes :

- ❶ Choix de l'inconnue : on le trouve à l'équation
- ❷ Mise en équation : transformation des données en une équation
- ❸ Résolution de l'équation
- ❹ Retour au problème : vérification et réponse aux questions

• Exemple

Ismail à acheté deux (2) cahiers et trois (3) stylos à 210 DHs
Sachant que le prix d'un cahier est égale au double du prix d'un stylo
Quel est le prix d'un stylo ?
Quel est le prix d'un cahier ?

Solution

- ❶ Choix de l'inconnue
  On considère x le prix d'un stylo
- ❷ Mise en équation
  Si x est le prix d'un stylo, alors le prix d'un cahier est $2x$
  Donc le prix de trois (3) stylos est $3x$, et le prix de deux (2) cahiers et $4x$
  Donc l'équation est : $3x+4x=210$
- ❸ Résolution de l'équation
  L'équation $3x+4x=210$ est respectivement équivalente à :
  $7x=210$
  $x=\dfrac{210}{7}$
  $x=30$
  Cette équation admet une seule solution 30
- ❹ Retour au problème
  On a $3\times 30+4\times 30=90+120=210$
  Donc la solution est juste
  ✓ Le prix d'un stylo est 30 DHs
  ✓ Le prix d'un cahier est 60 DHs

Yassine Elamri