Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Les Exercices du Chapitre :

Exercice

les Questions suivantes sont indépendantes.
Soit p un nombre premier supérieur ou égale à 3

1. Montrer que : $p \equiv 1[4]$ ou $p \equiv 3[4]$.

Soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5.

1. Montrer que : $p^2 + 11 \equiv 0[12]$.
2. Montrer que la somme de trois entiers naturels impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.
3. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Le nombre $a^4 + a^2 + 1$ est-il premier ?
4. Soient a, b et c des entiers naturels non nuls. Montrer que si $ab = cd$ alors $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un nombre premier.
5. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x > 1$ et $y > 1$. Montrer que $N = a^4 + 4b^4$ n'est pas premier.
6. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $n^4 + 4$ est premier.
7. Soit p un nombre premier supérieur ou égale à 3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^2 - y^2 = p$.

Exercice

Les Questions 1 et 2 sont indépendantes :
On pose : $a = 257$ et $b = 45$.

1. 1-a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer $a \wedge b$
   1-b) En déduire qu'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\alpha a + \beta b = a \wedge b$ avec α et β des entiers à déterminer.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide , calculer $137 \wedge 726$, puis déterminer le couple (x_0, y_0) tel que : $726x_0 + 137y_0 = 1$

Exercice

1. Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad (n^2 + 4n + 1) \wedge (n + 4) = 1$$

Yassine Elamri

.

2 développer $(n^2+1)^2$ et $(n^2+1)^3$.

3 En déduire à l'aide du théorème de Bezout, que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (n^4+2n^2+1) \wedge (n^4+3n^2+3) = 1$$

Exercice

1 Déterminer tous les entiers naturels n tels que : $n \leqslant 3\times 10^3$ et $n \equiv 5[139]$ et $n \equiv 5[140]$.

Exercice

Soit p un nombre premier.

1 Résoudre dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 = \overline{0}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2+\overline{8}x+\overline{16} = \overline{0}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $4x^2-2x-2 \equiv 0[3]$

Exercice

On considère l'équation E dans $\mathbb{Z}^2$ donnée par :

$$(E) : 324x - 245y = 7$$

1 Montrer que si (x,y) est une solution de (E), alors le nombre x est divisible par 7

2 Résoudre l'équation (E)

3 Soit (x,y) une solution de (E). On pose $d = x \wedge y$.
Déterminer les valeurs possibles du nombre d

4 Déterminer les couples (x,y) solutions de l'équation (E) tels que : $x \wedge y = 1$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1 Montrer que $n^7+6n \equiv 0[7]$

a/ Montrer que $n^5-n \equiv 0[5]$

b/ En déduire que : $n(n^2-1)(n^2-4) \equiv 0[5]$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Montrer que $n^2(n^2-1)(n^2+1) \equiv 0[60]$

Exercice

Les Questions de cet exercice sont indépendantes.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $N = \overline{52}_p$ et $N = \overline{42}_q$.

1 Déterminer les valeurs de p et q.

2 Déterminer les entiers naturels α et β tels que : $\overline{\beta\beta\beta}_{(b)} = \overline{\alpha\alpha}_{(2)}$

3 On considère les nombres suivants : $x = \overline{236}_{(8)}$ et $y = \overline{347}_{(8)}$.
Calculer $x+y$ et $x \times y$

4 Soit b un entier naturel supérieur ou égale à 2 tel que : $\overline{45}_{(b)} + \overline{36}_{(b)} = \overline{103}_{(b)}$.
Calculer : $\overline{45}_{(b)} \times \overline{36}_{(b)}$

5 Représenter le nombre $\overline{4523}_{(8)}$ dans le système de numération binaire

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today