Chapitre

VECTEURS DE L'ESPACE

Cours 1BSX

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On présentera la notion de vecteur et le calcul vectoriel de la même manière que celle utilisée dans le plan.** • **On se limitera à linterprétation géométrique de lalignement et de la coplanarité.**	• **Maitriser les règles du calcul vectoriel dans lespace.** • **Reconnaitre et exprimer la colinéarité de deux vecteurs.** • **Reconnaitre et exprimer la coplanarité de trois vecteurs.** • **Appliquer lalignement et la coplanarité pour résoudre des problèmes géométriques.**

Les prés-requis	Les extensions
- Théorème de Thalès et Théorème de Pythagore. - Calcul Vectoriel et Projection. - Géométrie dans le plan et l'espace. - Produit scalaire. - Ordre et opérations	- Produit scalaire, produit vectoriel et applications. - Produit vectoriel dans l'espace. - Géométrie dans lespace - Produit vectoriel dans l'espace.

Yassine Elaari

I Vecteurs de l'espace

1 Prolongement de la notion d'un vecteur dans le plan à l'espace

a notion de vecteur dans l'espace (F)

Définition

dans le plan un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ est défini par :

Direction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: c'est la droite (AB).

Sens de $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$: c′ st le sens de A vers **B**.

la norme de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (ou la longueur de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$) .est la distance AB on note : $\mathbf{AB} = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$. Cette notion sera prolongée à l'espace (E) et ainsi toutes les propriétés des vecteurs dans le plan sont valables dans chaque plan de l'espace $(\mathscr{E})$.

• Exemple

- I est le milieu de [**AB**] est équivaut à $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{2}\overrightarrow{\mathbf{AI}}$.

- Soient **A** et **B** et **C** trois points non alignés de l'espace ($\mathscr{E}^{\circ}$ donc **A** et **B** et **C** détermine un plan et un seul noté (ABC). - Dans le plan (ABC), on considère le triangle non aplati EFG ; I et J sont respectivement les milieux de $[EF]$ et $[EG]$ done on peut déduire que $\overrightarrow{\mathbf{IJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ et aussi les droites (I.J) $\|$(**FG**).

Remarque

Le cas $A = B$ le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}} = \overrightarrow{0}$ (le vecteur nul) n'a pas de direction et de sens et sa norme est nulle. On dit que deux vecteurs sont égaux si ils ont des directions parallèles et même sens et même norme. Un quadrilatère **ABCD** dans Yespace $(\mathscr{E})$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

Yassine Elamri

2 Calculs vectoriels dans respace

Remarque

La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel sont définis de la même manière que dans la géométrie plane et on a les mêmes propriétés.

• Exemple

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Relation de Chasles $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in (\varepsilon) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même norme mais sens opposé du sens $\vec{u}$ et on note $\overrightarrow{-\vec{u}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{u}}$:

- $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{u}}$ a la même direction que $\overrightarrow{\mathbf{u}}$.

- $\vec{v} = \mathbf{k}\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$.$\vec{v} = k\vec{u}$ a le sens opposé que $\vec{u}$ si $k < 0$.

- La norme de $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vérifie $\|\overrightarrow{\mathbf{v}}\| = |\mathbf{k}||\overrightarrow{\mathbf{u}}|$. Pour tout vecteur $\vec{u}$ on pose $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $\mathbf{k} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Propriété

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ de l'espace $(\mathscr{E})$ et pour tous réels $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}$ ' on a :

1. $(k+k') \cdot \vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
2. $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
3. $k(k' \cdot \vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$.
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
5. $k \cdot \vec{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (k = 0 \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{0})$.

Yassine Elamri

II Colinéarité de deux vecteurs - définition vectoriel d'une droite dans l'espace ($\mathscr{E}$).

1 Colinéarité de deux vecteurs - Colinéarité de trois points :

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un α de R tel que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \alpha\vec{u}$. (c.à.d. I'un des deux vecteurs s'écrit en fonction de l'autre).

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace. > $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $(AB)\|(CD)$. - A et B et C trois points de l'espace (&) sont alignés sie et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

92. Définition vectoriel d'une droite dans l'espace $(\mathscr{E})$:

Définition (Autre définition)

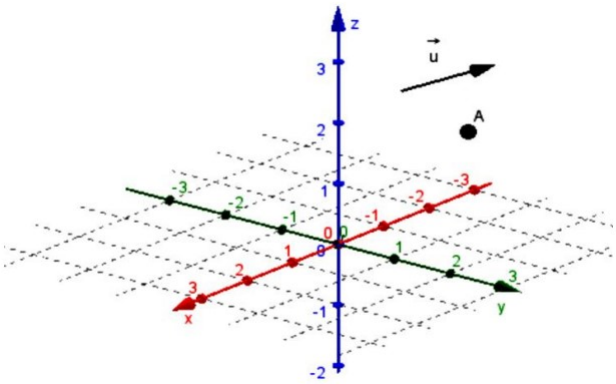
Soient A et B deux points distincts de l'espace $(\mathscr{E})$. Tout vecteur non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB). L'ensemble des points **M** de respace $(\mathscr{C})$ qui vérifient $\overrightarrow{AM} = \alpha u$ tel que α de R est la droite(D) qui passe par le point **A** et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, on note $D(A, \overrightarrow{u})$

$$\text{d'où : } D(A,\vec{u}) = \{M \in (\varepsilon)/\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

• Exemple

Soit A un point et $\vec{u}$ est un vecteur non nul de l'espace $(\mathscr{E})$ (voir figure ci contre). Construire la droite $D(A, \overrightarrow{u})$.

Yassine Elamri



III Vecteurs coplanaires - détermination vectoriel d'un plan dans l'espace

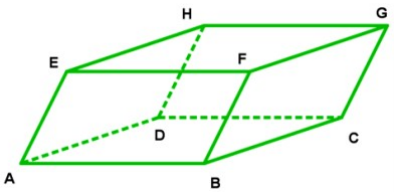
1 Vecteurs coplanaires

Définition (Autre définition)

Quatre points A et B et C et D de l'espace $(\&)$ sont coplanaires si et seulement si les quatre points appartiennent au même plan . Trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace $(\mathscr{E})$ sont coplanaires si et seulement s'il existe quatre points A et B et C et D coplanaires tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

• Exemple

ABCDEFGH est parallélépipède trouver 3 vecteurs coplanaires puis 3 vecteurs non coplanaires.



Correction : - On considère les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$. On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$ et on sait que les points D et C et G et H sont coplanaires d'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. - les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires.

Yassine Elamri

Remarque

- Si parmi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deus vecteurs sont colinéaires alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. - Si trois vecteurs sont constitués par cinq points on ne peut pas confirmer que les cinq points sont coplanaires. Exemple $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{EF}$ sont colinéaires mais les points A et B et D et E et F sont non coplanaires car le point D n'appartient pas au plan déterminé par **A** et **B** et **E** et **F**.

IV Détermination vectoriel d'un plan dans respace

Définition (Autre définition)

- Tout plan de respace $(\mathscr{E})$ est déterminé par un point donné de l'espace $(\mathscr{E})$ et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non coplanaires de (E). - Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés vecteurs directeurs du plan, ce plan sera noté $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$. - L'ensemble des points **M** de l'espace $(\mathscr{E})$ qui vérifient $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = \mathbf{x}\overrightarrow{\mathbf{u}} + \mathbf{y}\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tel que **x** et **y** de R est le plan] (P) qui passe par le point A et orienter par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ - d'ou : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in (\mathscr{E}) / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}; x \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de respace $(\vec{F})$. - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'un des trois vecteurs s'écrit en fonction des deux autres. - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\exists x, y \in \mathbb{R} / \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

• Exemple

$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB}$ s'écrit en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD}) \star \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} + \mathrm{y}\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{BC}$ s'écrit en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$) - Le vecteur nul est coplanaire avec deux autres vecteurs de respace $(\mathscr{X})$.

Yassine Elamri

Exercice

On considère les points les points A et B et C et D et E de l'espace $(\mathscr{E})$ tel que : (1) : $2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{0}$. 1. Montrer que : les points A et B et C et D sont coplanaires.

correction

On a : $(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}+4(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})-5(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC})-(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$$

D'où : $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$ done le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est écrit en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les vecteurs : $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. D'où : les points A et B et C et D sont coplanaires.

Conclusion : les points A et B et C et D sont coplanaires .

V Parallelisme dans l'espace :

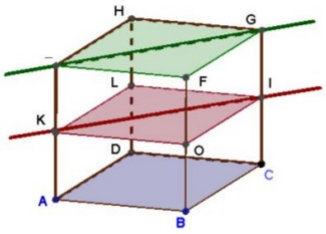
1 Parallélisme des droites dans l'espace $(\mathscr{E})$

Définition

D$(A,\overrightarrow{u})$ et $\Delta(B,\overrightarrow{v})$ sont deux droites de l'espace $(\mathscr{E})$. $\Delta(B,\vec{v})\|D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow (\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) ou encere $\Delta(B,\vec{v})\|D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v}=\alpha\vec{u};\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Yassine Elamri

• Exemple

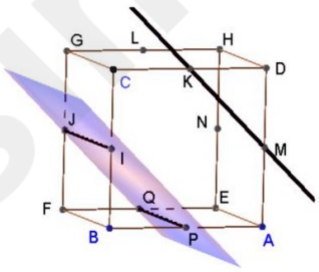


2 Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace $(\mathscr{E})$

Définition

D(A, $\overrightarrow{u}$) et P(B, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$) sont une droite et un plan de l'espace $(\mathbb{E})$. la droite $D(A,\vec{u})$ est parallèle au plan $P(B,\vec{v},\vec{w})$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ou encore $D(A,\vec{u})\|P(B,\vec{v},\vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v}+y\vec{w}/x,y \in R$.

• Exemple



3 Parallélisme de deux plans dans l'espace $(\nvDash)$

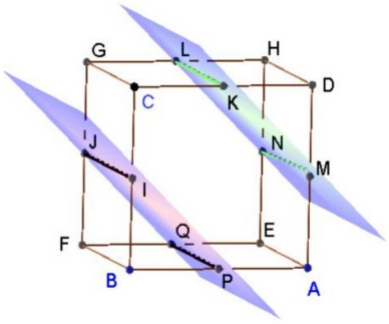
Définition

$P(B,\vec{v},\vec{w})$ et $Q(B,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})$ sont deux plans parallèles dans l'espace $(\vec{E})$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ sont coplanaires ou encore.

$$P(A,\vec{u},\vec{v})\|Q(B,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u_1} = x\vec{v}+y\vec{w}/x,y \in R \text{ et } \overrightarrow{u_2} = x'\vec{v}+y'\vec{w}/x',y' \in R\right)$$

Yassine Elamri

• Exemple



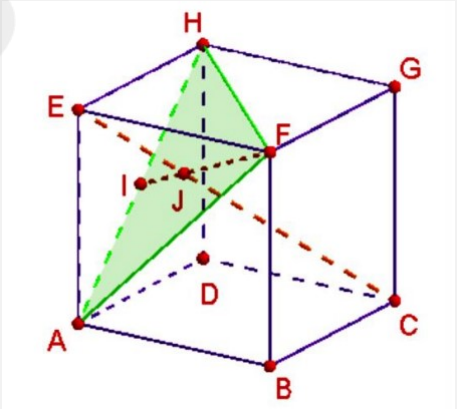
Exercice

On considère un cube ABCDEFGH, tel que I est le milieu de [AH] et *J* est un point de [FI] tel que : $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.

1. Construire la figure .
2. Montrer que : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
3. Montrer que : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.
4. Que peut-on conclure pour les points **E** et J et **C**. Correction :

correction :

On construit une figure :



2. Montrons que : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: On a :

Yassine Elamri

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ &= -\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD};(\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

3. Montrons que : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$: On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FJ}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FI}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AI})\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH})\Big)\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}\\ &= \overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\quad(\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{EC};(\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

4. Déduction pour les points **E** et **J** et **C** : Puisque $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires par suite les points E et J et C sont colinéaires. Conclusion : les points **E** et J et C sont colinéaires.

Yassine Elamri