Dérivation

Exercice

Étudier la dérivabilité de f au point a dans chacune des cas suivantes :

1. $\begin{cases} f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right);x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et $a=0$
2. $f(x)=(x-2)E(x)$ et $a=2$
3. $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1};x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ et $a=1$
4. $\begin{cases} f(x)=\left|x^2-x\right| & ;x<0 \\ f(0)=x\sqrt{x} & ;x\geq 0 \end{cases}$ et $a=0$

Exercice

1. Determiner la fonction affine tangente de la fonction $f(x)=\tan(x)$ au point 0 puis donner des valeurs approximatives de $f(0,01)$ et $f(-0,01)$.
2. Déterminer la fonction affine tangente a la fonction $g(x)=x^3-x$ au point 2 puis donner une valeur approximative de $g(2,001)$.
3. On considère la fonction h définie par : $h(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$
   Déterminer a et b sachant que la droite d'équation : $y=4x+3$ est tangente à la courbe (C_h) en $A(0,3)$.

Exercice

Calculer la dérivée de la fonction f après avoir déterminé l'ensemble de définition de f et f' :

1. $f(x)=x^5-2x^2+1$
2. $f(x)=\cos x+\sin x$
3. $f(x)=x+\frac{1}{x}$
4. $f(x)=\tan x+x^2+x$
5. $f(x)=(x+\sqrt{x})^3$
6. $f(x)=x^2+\sqrt{x}$
7. $f(x)=\sqrt{x}(1+\cos x)$
8. $f(x)=(x\tan x)^4$
9. $f(x)=\cos^2 x+\sin^3 x$
10. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$
11. $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$
12. $f(x)=\dfrac{2\tan x-1}{1-\tan x}$
13. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$
14. $f(x)=\sqrt{2x+1}$
15. $f(x)=\sqrt{x^2-x}$
16. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-2}$

Yassine Elamri

Exercice

En utilisant la notion du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$ 2 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x\sin x}{x-\pi}$ 3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(x+1)^3\cos x}{x}$ 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{2018}-1}{x}$

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{-x^2+2x+1}{x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f sur D_f.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x|\cos(3x)$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0=0$ puis interpréter les résultats géométriquement
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.
3. Écrire l'équation de la tangente à la courbe (C_f), au point $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

Exercice

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}};x\leq 0 \\ g(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1};x>0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f au point 0 puis interpréter le résultat géométriquement.
3. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.
4. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ puis donner le tableau de variations de la fonction g.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice

Partie A : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = 2x + \sqrt{4x^2+1}$.

1. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) \cdot g(-x) = 1$.
2. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad g(x) > 0$.
   b. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) \quad g(x) > 0$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{4x^2+1}}$
   b. En déduire le tableau de variations de f.
   c. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

Exercice

1. Soit x un réel positif. Montrer les inégalités suivantes :
   a. $\sin x \leq x$ b. $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ c. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ d. $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
2. En déduire que :
   a. $\forall x \in \mathbb{R}; 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ b. $\forall x \in \mathbb{R}_-; x \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6}$
3. Montrer que pour tous a et b de $\mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today