ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants et un problème réparties suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Problème : **Étude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques** ..... **11 points**

♠ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonrmé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0.-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$ et $C(-3;-1;2)$.

1 - Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et en déduire que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). — **1 pt**

2 - On considère la sphère (S) dont une équation est : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega\,(1;0;1)$ et pour rayon $R=5$. — **0,5 pt**

3 - a) Vérifier que $\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 2t \\ z &= 1+t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrque de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC). — **0,25 pt**

b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC). — **0,5 pt**

4 - Vérifier que $d\,(\Omega;(ABC))=3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre. — **0,75 pt**

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $2z^2+2z+5=0$. — **0,75 pt**

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonrmé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. — **0,25 pt**

b) On considère le point A d'affixe $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe du point B.

Montrer que : $b=da$. — **0,5 pt**

3 - Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C.

a) Vérifier que $c=b+a$ et en déduire que $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ — **0,75 pt**

b) Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral. — **0,25 pt**

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient **9** boules indiscernables au toucher : *cinq* boules rouges portant les nombres **1** ; **1** ; **2** ; **2** ; **2** et *quatre* boules blanches portant les nombres **1** ; **2** ; **2** ; **2**.

On considère l'éxpérience suivante : on tire au hasard et simultanément *trois* boules de l'urne.

Soit les évènements :

Yassine Elamri

$\boldsymbol{A}$: " Les trois boules tirées sont de même couleur"

$\boldsymbol{B}$: " Les trois boules tirées portent le même nombre"

$\boldsymbol{C}$: " Les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre"

1,5 pt **1 -** Montrer que $\boldsymbol{p(A) = \frac{1}{6}}$, $\boldsymbol{p(B) = \frac{1}{4}}$ et $\boldsymbol{p(C) = \frac{1}{42}}$.

2 - On répète l'éxpérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chque tirage, et on considère la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'évènement $\boldsymbol{A}$.

0,5 pt **a)** Déterminer les paramètre de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$.

1 pt **b)** Montrer que $\boldsymbol{p\,(X = 1) = \frac{25}{72}}$ et calculer $\boldsymbol{p\,(X = 2)}$.

Exercice 4 : (11 pts)

partie I : Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $\boldsymbol{]0;+\infty[}$ par :$\boldsymbol{g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1}$. Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction $\boldsymbol{g}$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{0}$		$\boldsymbol{+\infty}$
$\boldsymbol{g'(x)}$		$+$	
$\boldsymbol{g(x)}$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $\boldsymbol{g(0) = 0}$.

0,5 pt **2 -** Déterminer le signe de $\boldsymbol{g(x)}$ sur chacun des interevalles $\boldsymbol{]-\infty;0]}$ et $\boldsymbol{[0;+\infty[}$.

partie II : Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x}$. $\boldsymbol{(C)}$ sa courbe représentative dans un repère orthonrmé $\boldsymbol{\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)}$ (unité : $\boldsymbol{1cm}$).

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x}$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$ puis montrer que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b) Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)}$ puis en déduire que $\boldsymbol{(C)}$ admet une une asymptote $\boldsymbol{(D)}$ au

0,75 pt voisinage de $\boldsymbol{+\infty}$ d'équation $\boldsymbol{y = x}$.

0,5 pt **c)** Vérifier que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ et interpréter le résultat géométriquement.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que $\boldsymbol{f(x) - x}$ et $\boldsymbol{x^2 - x}$ ont le même signe pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $\boldsymbol{(C)}$ est au-dessus de $\boldsymbol{(D)}$ sur chacun des intervalles $\boldsymbol{]-\infty;0]}$ et $\boldsymbol{[1;+\infty[}$,

0,5 pt et en dessous de $\boldsymbol{(D)}$ sur l'intervalle $\boldsymbol{[0;1]}$.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $\boldsymbol{f'(x) = g(x)e^x}$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** En déduire que la fonction $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur $\boldsymbol{]-\infty;0]}$ et croissante sur $\boldsymbol{[0;+\infty[}$.

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction $\boldsymbol{f}$.

0,25 pt **4 - a)** Vérifier que $\boldsymbol{f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}}$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** En déduire que la courbe $\boldsymbol{(C)}$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $\boldsymbol{1}$ et $\boldsymbol{4}$.

Yassine Elamri

1 pt **5 -** Construire (D) et (C) dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (On prend $f(4) \approx 4,2$)

6 - a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction

0,5 pt $h : x \mapsto (x^2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

0,75 pt **b)** À l'aide d'une intergration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par C et D et les axes d'équations $x = 0$

0,75 pt et $x = 1$.

partie III : Soit U_n la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = fu_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **1 -** Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(On pourra utiliser le résultat de la question $II) - 3.b)$)

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite u_n est décroissante.

0,75 pt **3 -** En déduire que u_n est convergente et déterminer sa limite.

FIN

Yassine Elamri