Calcul de probabilités

I Expérience aléatoire-Événement - Univers :

1 Activité

expérience 1 : On lance un dé (cube à six faces numérotés de 1 à 6) et on note le résultat de la face supérieure.Quels sont les résultats possibles ?
expérience 2 : On lance une pièce de monnaie 3 fois successives et on note à chaque fois le résultat de la face supérieure.Quels sont les résultats possible ?

2 Expérience aléatoire-Eventualité-Univers-Evénement

a Définitions et exemples

expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont les résultats possibles sont connus mais on ne peut pas donner le résultat exact de la réaliser.

Exemple

expérience 1 et expérience 2
Les résultats possibles de ces deux expériences aléatoires :
expérience 1 : $\{1;2;3;4;5;6\}$
expérience 2 : $\{FFF, FFP, FPF, FPP, PPP, PPF, PFP, PFF\}$

Eventualité-Evénement élémentaire : Chaque cas possible s'appelle éventualité ou événement élémentare.

Exercice

expérience 1 : $\{1\}$ est une éventualité
expérience 2 : $\{FFP\}$ est une éventualité

Univers : les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble qu'on appelle univers.On le note Ω
expérience 1 : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
expérience 2 : $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PPP, PPF, PFP, PFF\}$
Evénement : toute partie A de Ω s'appelle événement
expérience 1 : $A = \{1,4\}$ est un événement
expérience 2 : $B = \{FFP, PPF, FPF\}$ est un événement

Yassine Elamri

3 Vocabulaire et notation :

- L'événement $A = \emptyset$ s'appelle événement impossible.
- L'événement $A = \Omega$ s'appelle événement certain.
- $A \cap B$ est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les deux événements A et B
  expérience 1 : A={1,3,4} et B={2,3,4,6} alors $A \cap B = \{3,4\}$
- $A \cup B$ est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées par l'événement A ou par l'événement B
  expérience 1 : A={1,3,4} et B={2,3,4,6} alors $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$
- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont deux événement incompatibles
  expérience 1 : A={1,3,4} et B={2,6} alors $A \cap B = \emptyset$
- Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ alors B s'appelle l'événement contraire de A,on le note $\bar{B}$ et on a $A = \bar{B}$ et $\bar{A} = B$.On dit que A et B constituent une partition de Ω
  expérience 1 : A={1,4} l'événement contraire de A est $\bar{A} = \{2,3,5,6\}$
  expérience 2 : B={FFP,PPF,PFF} l'événement contraire de B est $\bar{B} = \{FPP; FPF; PFP; FFF; PPP\}$

II Notion de probabilité

1 Activité

On lance dans l'air une pièce de monnaie et on marque à chaque fois la face supérieur.
On répète cet expérience 100 fois.Ce tableau donne le nombre de réalisations de chaque face :



1 - Déterminer l'événement élémentaire qui a la plus grande chance d'être réaliser.
2 - Déterminer l'événement élémentaire qui a la plus petite chance d'être réaliser.

1 - C'est l'événement élémentaire F qui a la plus grande d'être réaliser.
On dit que la probabilité de l'événement élémentaire F est $\frac{53}{100}$ on écrit $p(F) = \frac{53}{100}$
2 - C'est l'événement P qui a la plus petite chance d'être réaliser
On dit que la probabilité de l'événement élémentaire P est $\frac{47}{100}$ on écrit $p(P) = \frac{47}{100}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

D **Définition**

Soit $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si n_i est le nombre de fois qu'on a obtenue x_i.Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilté de l'événement élémentaire $\{x_i\}$
On note $p_i = p(\{x_i\}) = \frac{n_i}{N}$ on a : $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$
La probabilté d'un événement A est la saomme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent :
si $A = \{x_1, x_3, x_7\}$ alors on a $p(A) = p(\{x_1\}) + p(\{x_3\}) + p(\{x_7\})$

Exemple

Dans l'activité précédente $\Omega = \{F, P\}$ donc $p(\{F\}) + p(\{P\}) = 1$

Propriété

A et B sont deux événement d'un univers ω d'une expérience aléatoire

$$\forall A \in \Omega : 0 \leq p(A) \leq 1; \quad p(\Omega) = 1; \quad p(\varnothing) = 0$$
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

Exercice

Une urne contient 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5
Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne.

1. Déterminer Ω l' univers des cas possibles.
2. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
3. Considérons les événements suivants :
   A : " La boule tirée est blanche "
   B : " La boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à 4 "
   C : " La boule tirée est verte et porte un numéro pair "
   a- Calculer $p(A), p(B)$ et $p(C)$
   b- Déterminer AUB puis montrer que $p(AUB) = p(A) + p(B)$
   c- A-t-on $p(B \text{ UC }) = p(B) + p(C)$
4. Considérons les événements suivants :
   D : " La boule tirée est verte "
   E : " La boule tírée est blanche ou porte un numéro impair "
   Calculer $p(D)$ et $p(E)$ en utilisant 3)a)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Hypothèse d'équiprobabilité :

Propriété

Soit une expérience aléatoire d' univers Ω ou tout les événements élémentaires ont même probabilité alors probabilité d'un évènement A de Ω est :

$$p(A) = \frac{\text{card}\, A}{\text{card}\, \Omega}$$

Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivantes :
- Les boules sont indiscernables au toucher.
- On lance un dé au hasard
- On lance une pièce de monnaie équilibrée

Exemple

On lance au hasard dans l'air un dé et on note le nombre de la face supérieure.
Soit l'événement : $A = \{1,2,5,6\}$ ona $p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{4}{6}$ avec $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Exercice

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

1. Déterminer l'univers des cas possibles
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A:" Obtenir au moins deux piles"
   B:" Obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer "
   C:" obtenir au plus une fois pile"
3. Les deux événements A et C sont-ils incompatibles ?

Application

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches.
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1. Combien y'a-t-il de résultats possibles ?
2. Calculer la probabilité de chaque événement :
   A:" Obtenir 3 boules de même couleur"
   B:" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes deux à deux "

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

C:" Obtenir 3 boules de couleur distinctes"
D:" Obtenir au plus 2 boules rougess"
E:" Obtenir au moins une boule blanche"

IV Probabilité conditionnelle-indépendance de deux événements :

1 Probabilité conditionnelle-indépendance de deux événements

D — Définition

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire .

Probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

on la note par $p_A(B)$ ou par $p(B/A)$ donc on a $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

A et B sont deux événements indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ c'est à dire : $p_A(B)=p(B)$.

Propriété

A et B deux évenements non vides c à d : $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$
On a : $p(A\cap B)=p(A)p_A(B)=p(B)p_B(A)$

Exercice

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules noires numérotées $0,0,0,1,1$ 3 boules blanches numérotées 1,1,2 2 boules rouges numérotées 2,2
On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac On considère les deux événements suivants :

A : " les boules tirées ont la même couleur "
B : " les boules tirées portent le même numéro "

1. Calculer $p(A), p(B)$ et $p(A\cap B)$
2. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
3. Calculer la probabilité de chaque événement : C : " les boules tirées portent le même numéro sachant qu'il ont la même couleur " D : " les boules tirées ont la même couleur sachant qu' il portent le même numéro "

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Expérience composée

D Définition

A_1 et A_2 sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire et qu forment une partition de Ω c-à-d A_1 et A_2 sont disjoints et $A_1 \cup A_2 = \Omega$.
La probabilité d'un événement **B** de Ω est : $p(B) = p(A_1)\, p_{A_1}(B) + p(A_2)\, p_{A_2}(B)$

V Variable aléatoire-loi de probabilté

1 Variable aléatoire

Activité

Un sac contient 6 cartes indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6.
On tire au hasard et simultanément 3 cartes au sac.
On associe à chaque tirage le nombre de cartes qui portent un numéro pair.
Cet relation est entre l'ensemble des cas possibles Ω et l'ensemble $\mathbb{R}$
On la note X et on l'appelle variable aléatoire sur Ω et on a :

$$\begin{array}{rccc} X & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & A_1 & \mapsto & X(A_1) = x_i \end{array}$$

x_i est le nombre de cartes de numéros pairs pour chaque A_i
$x = 0$: " toutes les cartes tirées portent des numéros impairs "
$x = 1$: " une seule carte des cartes tirées porte un numéro pair "
$x = 2$: " deux cartes exactement des cartes tirées porte un numéro pair "
$x = 3$: " les trois cartes tirées porte un numéros pairs "
Les valeurs du variable aléatoire x sont : 0,1,2,3 et on écrit : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

Exemple

Calculer la probabilité de chaque valeur de la variable aléatoire X de l'activité précédente.
On tire simultanément 3 cartes parmi 6 donc $card\Omega = C_6^3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

$p(X=0) = \dfrac{card(X=0)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{20}$; "$X=0$" : 3 cartes impairs

$p(X=1) = \dfrac{card(X=1)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^1 \times C_3^2}{C_6^3} = \dfrac{9}{20}$; "$X=1$" : 1 carte pair et 2 impairs

$p(X=2) = \dfrac{card(X=2)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^2 \times C_3^1}{C_6^3} = \dfrac{9}{20}$; "$X=2$" : 2 carte pair et 1 impairs

$p(X=3) = \dfrac{card(X=3)}{card\Omega} = \dfrac{C_3^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{20}$; "$X=3$" : 3 cartes pairs

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

D Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$
Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X=x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$
On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

X_i	X_1	X_2	....	X_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	....	$p(X=x_n)$

Remarque

$p(X=x_1)+p(X=x_2)+p(X=x_3)=...+p(X=x_n)=1$

VI Espérance mathématique-variance-écart type

D Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$

- Le nombre : $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} x_i.p(X=x_i)=x_1.p(X=x_1)+x_2.p(X=x_2)+...+x_n.p(X=x_n)$

s'appelle l'espérance mathématiques du variable aléatoire X

- Le nombre : $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(x_1)^2.p(X=x_1)+(x_2)^2.p(X=x_2)+...+(x_n)^2.p(X=x_n)-[E(X)]^2$ s'appelle la variance du variable aléatoire X
- Le nombre : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ s'appelle l'écart-type du variable aléatoire X

Remarque

$V(X)\geq 0$

Exemple

Calcule de l'espérance mathématique ;variance et écart-type du variable aléatoire de l'exemple précédent.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

x_i	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=2$	$x_4=3$
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$
$x_i \times p(X=x_i)$	0	$\frac{9}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{3}{20}$
$x_i \times p(X=x_i)$	0	$1^2 \times \frac{9}{20}$	$2^2 \times \frac{18}{20}$	$3^2 \times \frac{3}{20}$

L'espérance mathématique de X

$$E(X)=x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+x_3\times p(X=x_3)+x_4\times p(X=x_4)\ =0+\frac{9}{20}+\frac{18}{20}+\frac{3}{20}=\frac{30}{20}$$

La variance de X

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(x_1)^2.p(X=x_1)+(x_2)^2.p(X=x_2)+\ldots+(x_4)^2.p(X=x_4)-[E(X)]^2=$$
$$0+1\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{18}{20}+3^2\frac{3}{20}-(\frac{3}{2})^2=\frac{63}{20}$$

L'écart-type de X

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{63}{20}}$$

VII Loi binomiale

D Définition

Soit p la probabilité d'un événement S d'une expérience aléatoire.
On répète cette expérience n fois.On considère X la variable aléatoire associé au nombre de fois ou l'événement S est réalisé. On a : $X(\Omega)=\{0,1,2,\ldots,n\}$
X est appelé loi binomiale ou distribution binomiale de paramètre n et p

Propriété

Soit X une loi binomiale de paramètre n et p. On a :

$$E(X)=n.p \text{ et } V(X)=n.p.(1-p)$$

Exemple

On considère l'expérience aléatoire de l'exemple précédent.Soit l'événement S:" les trois cartes tirés portent des numéros impairs ". On a $S:(X=0)$ et $p(S)=p(X=0)=\frac{1}{20}$
On répète cette expérience (tirage de 3 cartes simultanément) 4 fois avec les même conditions de départ.
On considère la variable aléatoire X associée au nombre de fois où l'événement S est réalisé.
X est une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{20}$
Calculons l'espérance mathématique et la variance de la loi binomiale X

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$$E(X) = n.p = 4 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \text{ et } V(X) = n.p.(1-p) = 4 \times \frac{1}{20} \times (1 - \frac{1}{20}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today