Chapitre

La dérivation

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
► Parmi les exemples à traiter ; approximation affine au voisinage de 0, des fonctions suivantes : $h \to (1+h)^2$; $h \to (1+h)^3$; $h \to \frac{1}{1+h}$ et $h \to \sqrt{1+h}$ ► On utilisera $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}$ pour déterminer la dérivée de chacune des fonctions $x \to cosx$ et $x \to sinx$ ► On admettra les théorèmes concernant la monotonie et le signe de la dérivée première ; ► on admettra la solution générale de l'équation différentielle : $y" + \omega^2 y = 0$	■ Approcher une fonction au voisinage d'un point x_0 ; ■ Reconnaitre que le nombre dérivé de la fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse x_0 ; ■ Reconnaitre les dérivées des fonctions de référence ; ■ Maitriser les techniques de calcul de la dérivée de fonctions ; ■ Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente ; ■ Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée ; ■ Déterminer e signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa courbe représentative ; ■ Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales.

Les prés-requis	Les extensions
■ Manipulation des fonctions . ■ Équations et inéquations . ■ Généralités sur les fonctions . ■ Tableau de variation . ■ Limites d'une fonction .	► Étude des fonctions numériques . ► Théorème des valeurs intermédiaires - Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis ... ► Dérivées partielles. ► Applications en physique : calcul de vitesse, d'accélération, de force, et d'énergie ...

Yassine Elamri

Avant propos

L'évolution du concept de "la dérivation" en mathématiques a commencé au XVIIe siècle avec les travaux indépendants d'Isaac Newton et de Gottfried Wilhelm Leibniz. Chacun a introduit des méthodes pour mesurer les taux de variation de quantités et de fonctions. Newton a employé les "fluxions", tandis que Leibniz a développé la notation "dy/dx" pour représenter les petites variations. Cette période a été marquée par une querelle sur la paternité du calcul différentiel entre les deux mathématiciens. Au fil du temps, la notation de Leibniz s'est imposée comme la norme, et la dérivation est devenue un pilier de l'analyse mathématique, ayant des applications répandues dans divers domaines.

I Dérivabilité dune fonction au un point

1 Le nombre dérivé

Activité

La chute d'une balle de tennis a été prise en photos à intervalles réguliers de 0,02 seconde (chronophotographie). Des mesures de la distance $d(t)$ parcourue par la balle (en mètre) en fonction du temps t (en seconde) sont effectuées et sont données dans le tableau suivant :



t	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$d(t)$	0,29	0,327	0,388	0,446	0,509	0,575	0,644

La vitesse moyenne v d'un objet est le quotient de la distance parcourue d par le temps t mis pour la parcourir. Avec les données de l'exercice, on l'exprime en mètre par seconde $(m.s^{-1})$: $v = \dfrac{d}{t}$

1 **a-** Calculer la vitesse moyenne de la balle entre $0,26s$ et $0,30s$, entre $0,28s$ et $0,32s$ puis entre $0,30s$ et $0,34s$.

b- La vitesse moyenne obtenue est-elle la même pour une même durée ? pourquoi ?

2 On admet que, pour tout $t > 0$, $d(t) = 5t^2$. Soit $h > 0$. Exprimer, en fonction de h, la vitesse moyenne entre deux instants très proches $t = 0,3 + h$ et $t = 0,3$.

3 **a-** On prend des valeurs très proches de 0 pour h. Calculer la vitesse moyenne en $(m.s^{-1})$ pour $h = 0,1$, pour $h = 0,01$, pour $h = 0,001$ et pour $h = 0,0001$.

b- Que constate-t-on pour la valeur de la vitesse moyenne quand h se rapproche de plus en plus de 0 ?

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

On dit que la fonction f est dérivable en a sil existe un nombre réel l tel que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a et on le note par $f'(a)$, on écrit :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Remarque

– Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ ou $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'a pas de limite en a alors f n'est pas dérivable en a .

– On pose $h=x-a$, on obtient que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=f'(a)$

.

• Exemple

Étudions la dérivabilité de la fonction $f(x)=x^2-3x+4$ en $a=1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+4-2}{x-1}==\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x-2=-1$

Alors la fonction f est dérivable en $a=1$ et on a $f'(1)=-1$.

Application

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a puis donner le nombre dérivé $f'(a)$ dans chacun des cas suivants :

1- $f(x)=3x+1$ et $a=-1$

2- $f(x)=sin(2x)$ et $a=0$

3- $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ et $a=2$

4- $f(x)=\sqrt{x-1}+1$ et $a=5$

5- $f(x)=x^3-3$ et $a=1$

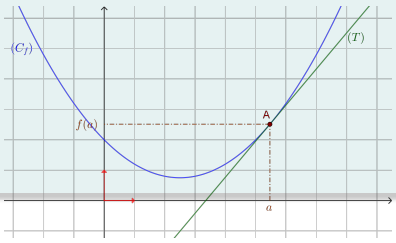
6- $f(x)=cos(x)$ et $a=\dfrac{\pi}{2}$

2 Interprétation géométrique du nombre dérivé

Définition

La droite (T) qui passe par le point $A(a;f(a))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à courbe (C_f) au point A.

Le nombre dérivé de f en a est unique donc la tan-



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

gente à sa courbe en A est également unique.

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point a.

Une équation de la tangente (T) à la courbe da la fonction f au point $A(a;f(a))$ est :

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

• Exemple

Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction $f(x)=x^2-3x+4$ au point A(1 ; f(1)) :

On a $f(1)=2$ et $f'(1)=-1$ daprès lexemple précédent.

Donc, une équation de la tangente (T) est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

C'est-à-dire $y=-1(x-1)+2$, donc $(T): y=-x+3$.

Application

Dans chaque cas, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de courbe représentative C_f dans un repère. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse a.

1- $f(x)=3x+1$ et $a=-1$

2- $f(x)=sin(2x)$ et $a=0$

3- $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ et $a=-1$

4- $f(x)=\sqrt{x}-x$ et $a=1$

5- $f(x)=x^3+2x^2-1$ et $a=1$

6- $f(x)=sinx)-tanx$ et $a=0$

3 Approximation dune fonction dérivable en un point par une fonction affine

Définition

Soit f une fonction dérivable en un point a.

– La fonction $g: x \mapsto f'(x)(x-a)+f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a.

– Le réel $g(x)=f'(x)(x-a)+f(a)$ est lapproximation affine du réel f(x) au voisinage de a. On écrit $f(x) \simeq g(x)$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Un exercice classique consiste à trouver sans calculatrice une valeur approchée dune fonction au voisinage dun entier.

Donc, quelle serait une valeur approximative de $sin(3)$?

on peut prendre : $f(x) = sin(x)$ et $a = \pi$ (car π est lélément le plus proche de 3 dont le sinus est connu)

On a alors $f(a) = sin(\pi) = 0$ et $f'(a) = f'(\pi) = -1$ (à prouver)

Ce qui donne : $g(x) = -1 \times (x - \pi) + 0$ (la fonction affine tangente à f au voisinage de π)

Cest-à-dire $f(3) \simeq g(3) = -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$. Donc $sin(3) \simeq 0.14$

Une calculatrice donne $sin(3) = 0.14112000806...$

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

1. Déterminer la fonction affine tangente à la fonction f en 0.
2. En déduire une valeur approchée du nombre $f(0,0004)$.
3. Trouver une valeur approchée du nombre $f(1,0004)$.

II Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

1 Définitions et notations

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;\alpha[$ tel que $(a < \alpha)$.

On dit que la fonction f est dérivable à droite en a sil existe un réel l_1 tel que :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l_1$$

Le réel l_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a et on le note par $f'_d(a)$

Et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha;a[$ tel que $(a > \alpha)$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On dit que la fonction f est dérivable à gauche en a sil existe un réel l_2 tel que :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_2$$

Le réel l_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a et on le note par $f'_g(a)$

Et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$:

$$\left(\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l\right) \Leftrightarrow f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = l$$

• Exemple

Étudions la dérivabilité de la fonction f en $a=1$ tel que : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-2}{x+1} & ; x > 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - x - \dfrac{1}{2} & ; x \leq 1 \end{cases}$

on a $f(1) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -1$

D'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2}x^3 - x - \frac{1}{2} + 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2}(x-1)(x^2+x-1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

Donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = \frac{1}{2}$

d'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\frac{-2}{x+1}+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$

Donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \frac{1}{2}$

Et puisque $f'_d(1) = f'_g(1) = \frac{1}{2}$

Alors f est dérivable en $a=1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Étudier la dérivabilité de f en a dans chacun des cas suivants :

1- $\begin{cases} f(x)=x^4 & ;x\geq 2 \\ f(x)=-x^2+x+2 & ;x<2 \end{cases}$ et $a=2$.

2- $\begin{cases} f(x)=x^2+\dfrac{1}{x} & ;x<-1 \\ f(x)=2x+3 & ;x\geq -1 \end{cases}$ et $a=-1$.

3- $f(x)=|x^2-1|$ et $a=1$.

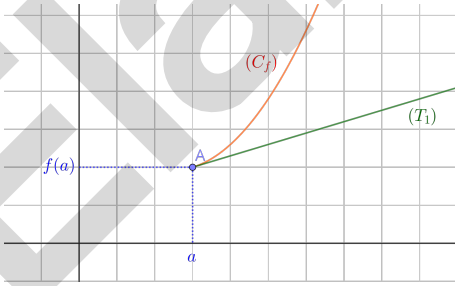
4- $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ et $a=1$ (à droite).

2 Interprétation géométrique – Demi-tangente en point dune courbe

Propriété

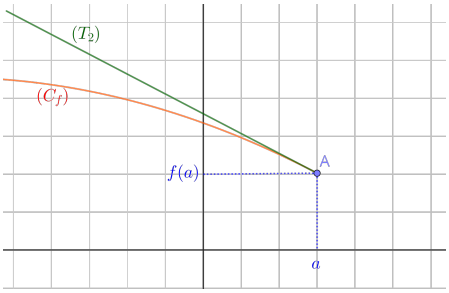
- Si f est une fonction dérivable à droite en a alors, cela signifie graphiquement que (C_f) admet une demi-tangente (T_1) à droite au point $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$. Équation de la demi-tangente (T_1) est :

$$\begin{cases} y=f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x\geq a \end{cases}$$



- Si f est une fonction dérivable à gauche en a alors, cela signifie graphiquement que (C_f) admet une demi-tangente (T_2) à gauche au point $A(a;f(a))$ de coefficient directeur $f_g{}'(a)$. Équation de la demi-tangente (T_2) est :

$$\begin{cases} y=f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x\leq a \end{cases}$$



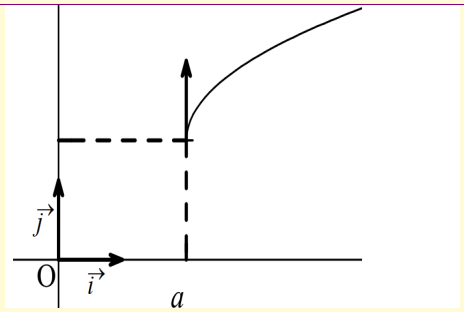
Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

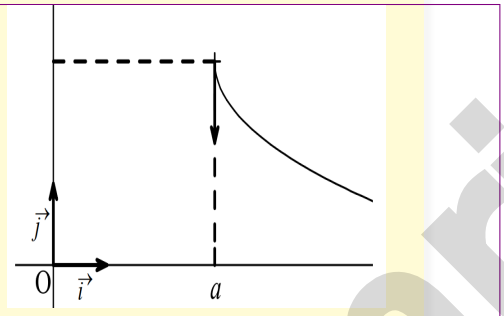
– Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ alors, cela signifie graphiquement que (C_f) admet une demi-tangente verticale à droite au point $A(a;f(a))$:

Yassine Elamri

Today better than ye https://steinmath.com than today

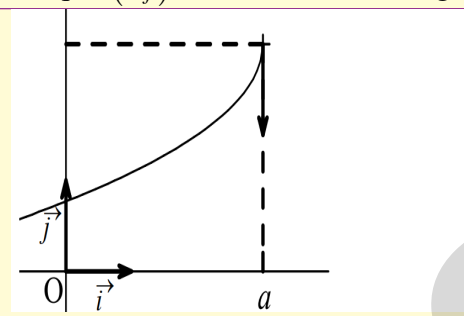


$\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$: dirigée vers le bas

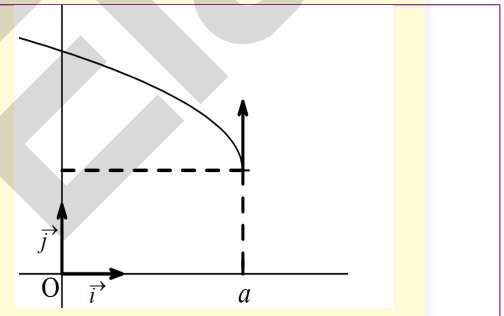


$\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$: dirigée vers le haut

– Si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors, cela signifie graphiquement que (C_f) admet une demi-tangente verticale à gauche au point $A(a;f(a))$:



$\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$: dirigée vers le haut



$\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$: dirigée vers le bas

• Exemple

L'interprétation géométrique des résultats de l'exemple précédent :

On a $a=1$ et $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-2}{x+1} & ;x>1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-x-\dfrac{1}{2} & x\le 1 \end{cases}$

Nous avons déjà montré que f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)=\dfrac{1}{2}$

Alors (C_f) admet une demi-tangente (T_1) à droite au point $A(1;-1)$ d'équation : $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(x-1)-1=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \\ x\ge a \end{cases}$

Et aussi f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=\dfrac{1}{2}$

Alors (C_f) admet une demi-tangente (T_2) à gauche au point $A(1;-1)$ d'équation : $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(x-1)-1=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2} \\ x\le a \end{cases}$

Yassine Elamri

Today be https://steinmath.com rrow better than today

Application

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{x^2-2x}$.

1 Déterminer D_g l'ensemble de définition de g.

2 Étudier la dérivabilité de g à droite en 2. Interpréter graphiquement le résultat.

3 Étudier la dérivabilité de g à gauche en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

III Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

- On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I.
- On dit que f est dérivable sur $[a;b]\subset I$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et f est dérivable à droite en a et à gauche en b.
- On dit que f est dérivable sur $]a;b]\subset I$ si f est dérivable sur $]a;b[$ et f est dérivable à gauche en b.
- On dit que f est dérivable sur $[a;b[\subset I$ si f est dérivable sur $]a;b[$ et f est dérivable à droite en a.

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2-1$. Montrons que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

– Soit $a\in]0;+\infty[$, déterminons le nombre dérivé de f en a (il est préférable dutiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

On a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h+a)^2-1-a^2+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+2ah+a^2-a^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h+2a)}{h}=2a$

Alors f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

– On a $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-1+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2}{h}=0$

Alors f est dérivable à droite en 0

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point de $[0;+\infty[$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

I- Soient f et g deux fonctions telles que : $f(x)=x^3+2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.

1 Étudier la dérivabilité de la fonction f sur D_f.

2 Étudier la dérivabilité de la fonction g sur D_g.

II- Soit h la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x^4 & ;x\geq 2 \\ f(x)=-x^2+x+2 & ;x<2 \end{cases}$.

1 Étudier la dérivabilité de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

IV Fonction dérivée d'une fonction

1 Définitions et notations

Activité

1 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$.

a La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier la réponse.

b Soit a un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$. Montrer que la fonction f est dérivable au point a et que : $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La fonction qui, à tout réel $a\in]0;+\infty[$, associe le nombre dérivé $f'(a)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f et on la note f'.

Pour cet exemple, f' est la fonction dérivée de la fonction f est donnée par :

$(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 Soit u et v les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=x^2$ et $v(x)=x^3$.

Montrer que les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction qui à tout réel x de I, associe le nombre

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f , elle est notée f' et définie par :

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+x)-f(x)}{h}$$

• Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$

Montrons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée :

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\lim_{h\to 0} \frac{f(h+x)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h+x)^2+(h+x)-(x^2+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+1+h)}{h} = 2x+1$

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = 2x+1$

Application

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = sin(x) & ; x \geq 0 \\ f(x) = -x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases}$.

1 Étudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2 Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

2 Dérivées des fonctions usuelles - Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Fonction f	D_f	Fonction dérivée f'	$D_{f'}$
$f : x \mapsto a;\quad a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	$]0;+\infty]$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f' : x \mapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Si f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :

- La fonction $f+g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f+g)' = f'+g'$.
- La fonction kf tel k est un réel, est dérivable sur l'intervalle I et on a $(kf)' = kf'$.
- La fonction $f \times g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f \times g)' = f'g + g'f$.
- Si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout réel x de I, alors :
  - La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.
  - La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$.

Proposition

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, c'est-à-dire $c \neq 0$ et ad - bc $\neq 0$, est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$, et on a : $\left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}\right) : \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Exemple

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$.
   En tant que fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - x + 3$
2. g est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.
   g est dérivable sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle , et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $g'(x) = \frac{1 \times (-2) - 1 \times 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$
3. h est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, par $h(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$.
   h est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle et, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $h'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2-x) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

Yassine Elamri

Thttps://steinmath.com y, tomorrow better than today

Application

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1- $f(x)=2x^5-3x^4-5x^2+1$

2- $f(x)=\dfrac{2x-3}{4x+1}$

3- $f(x)=x^2+4\sqrt{x}$

4- $f(x)=\dfrac{3x}{5x^2+2}$

5- $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

6- $f(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$

3 Dérivées des fonctions f^n, $\sqrt{f}$ et $f(ax+b)$

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

– La fonction f^n tel que $(n\in\mathbb{N}^*)$ est dérivable sur I, et on a : $(f^n)'=nf^{n-1}\times f'$.

– Si $\forall x\in I; f(x)\neq 0$ alors la fonction f^n tel que $n\in\mathbb{Z}_*^-$ est dérivable sur I est on a :

$(f^n)'=nf^{n-1}\times f'$.

• Exemple

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^3+x)^4$.

En tant que fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$,et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$f'(x)=4f^3(x)\times f'(x)=4(x^3+x)^3(3x^2+1)$

Propriété

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

La fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I, et on a : $(\forall x\in I)\quad (\sqrt{f})'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

• Exemple

g est dérivable sur $I=]-\infty;-1]\cup]2;+\infty[$, et elle est définie par $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$.

On a $(\forall x\in I)\quad g'(x)=\dfrac{(\frac{x+1}{x-2})'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}=\dfrac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}=\dfrac{-3}{2(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

Yassine Elamri

Today https://steinmath.com omorrow better than today

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux nombres réels tels que a $\neq 0$ et soit J

htt

– Déterminons $f\ (x)\,;\, x \in \mathbb{R}$:

En tant que fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$,et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2ax + b$

Today better than yesterday, tomorrow better than today

– Déterminons $f''(x)$; $x \in \mathbb{R}$:

En tant que fonction polynôme f' est dérivable sur $\mathbb{R}$,et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = (f'(x))' = 2a$

– Déterminons $f^{(3)}(x)$; $x \in \mathbb{R}$:

En tant que fonction polynôme f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$,et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(3)}(x) = (f''(x))' = 0$

Application

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -2x^4 - +3x^3 + x^2 + 7x - 5$.

Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V Applications de la dérivation

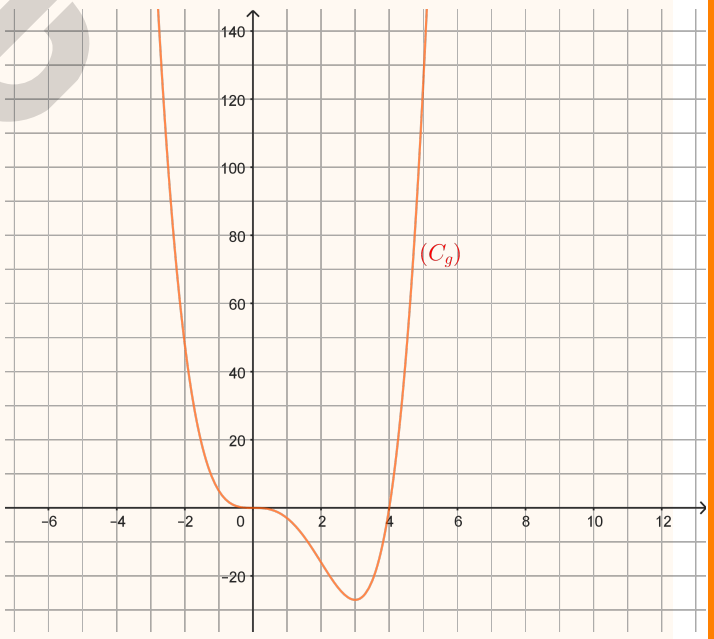
1 Monotonie dune fonction et signe de sa fonction dérivée

Activité

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^4 - 4x^3$.

g' est la fonction dérivée de g.

On donne ci-contre la courbe (C_g) représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.



(1) Déterminer graphiquement le sens de variation de la fonction g puis dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$. On calculera la valeur des éventuels extremums.

(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) = 4x^2(x-3)$

(3) Dresser le tableau de signes de g'.

(4) a- Quel est le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]-\infty;3]$?

b- Quel est le sens de variation de g sur $]-\infty;3]$?

(5) a- Quel est le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[3;+\infty[$?

b- Quel est le sens de variation de g sur $[3;+\infty[$?

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

(6) a- La fonction g' change-t-elle de signe entre -1 et 1 ?

b- La fonction g change-t-elle de variation entre -1 et 1 ?

(7) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{2}$

a- Représenter à la calculatrice la fonction f .

b- Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2$

c- Répondre aux questions **(3)** à **(6)** avec les fonctions f et f' en choisissant les bons intervalles.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $(\forall x\in I); f'(x)\geq 0$ alors f est croissante sur l'intervalle I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)\leq 0$ alors f est décroissante sur l'intervalle I.
- Si $(\forall x\in I); f'(x)=0$ alors f est constante sur l'intervalle I.
- Si la dérivée f' est strictement positive (resp. négative) sur l'intervalle I, sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle I.

Remarque

Avec ce théorème, on peut démontrer que les fonctions f et $-f$ sont de variations contraires sur un intervalle I où elles sont dérivables.

• Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^3+x^2+5$

f est une fonction polynôme du troisième degré, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-3x^2+2x$.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$\frac{139}{27}$	↘	$-\infty$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x^2+x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Résoudre dans D_f l'équation $f(x)=0$, puis déduire le tableau de signe de f.

2 Extremums dune fonction dérivable

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

Si f admet un extremum local au point a, alors $f'(a)=0$.

Si f' sannule en changeant de signe en un réel a , a nétant pas une borne de I, alors f admet un extremum local en a puisque f est :

– Soit croissante avant a et décroissante après a (maximum local en a)

– Soit décroissante avant a et croissante après a (minimum local en a)

Remarque

– Si $f'(a)=0$ alors $f(a)$ n'est pas nécessairement un extremum local de la fonction f.

Par exemple 0 n'est un extremum local pour la fonction $f:x\mapsto x^3$ même que $f'(0)=0$.

– Si f' s'annule en c sans changer de signe, alors $f(c)$ n'est pas un extremum.

• Exemple

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathrm{I}=[-4;6]$ dont on donne le tableau de variation :

x	-4		0		2		6
$f(x)$	5	↘	-1	↗	3	↘	1

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

La lecture de ce tableau nous permet d'affirmer :

– Que f admet sur I un maximum en $x=-4$ et un minimum en $x=0$

– Que sur $]-1;3[$ f admet un maximum local en $x=2$ et un minimum en $x=0$ et que par conséquence $f'(0)=0$ et $f'(2)=0$

– En outre on peut affirmer que $f('x)\geq 0$ sur $[0;2]$,et $f'(x)\leq 0$ sur $[-4;0]$ et sur $[2;6]$.

Application

Déterminer les extremums de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1- $f(x)=x^4-2x^2+7$ **2-** $f(x)=x^3(2-x)$

VI Équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$

Activité

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(2x)$ et $g(x)=\sin(2x)$.

(1) Montrer que la fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifier que :

$(\forall x\in\mathbb{R}); f''(x)+4f(x)=0$.

(2) Vérifier que la fonction g est aussi une solution de l'équation $y''+4y=0$.

(3) Montrer que toute fonction, qui s'écrit sous la forme $x\mapsto a\cos(2x)+b\sin(2x)$ où a et b sont des réels, est une solution de l'équation $y''+4y=0$.

Définition

Soit ω un nombre réel non nul.

– L'équation $y''+\omega^2 y=0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée une équation différentielle.

– Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ pour tout réel x est appelée une solution de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$.

Propriété

Soit ω un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ est l'ensemble des fonctions des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y: x\mapsto \alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Résolvons l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$:

On a : $\omega^2 = 4$ alors $\omega = -2$ ou $\omega = 2$. On prend par exemple $\omega = 2$, on peut choisir $\omega = -2$ et ceci ne change pas la solution générale. Donc, la solution générale de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Remarque

Résolution de l'équation différentielle particulière $y'' = 0$:

Si $y'' = 0$ alors y' est une fonction constante . Donc, les solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \mapsto ax + b$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Application

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 9y = 0$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. Déterminer la fonction f la solution de l'équation (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today