Chapitre

La dérivation d'une fonction numérique

Contenu du programme

• Dérivabilité en un point ; nombre dérivé ; interprétation géométrique ; tangente à une courbe ; approximation d'une fonction dérivable par une fonction affine en un point ;

• Dérivabilité à droite ; dérivabilité à gauche ; interprétation géométrique et, demi- tangente ; tangente ou demi- tangente verticale ; point anguleux ;

• Dérivabilité sur un intervalle ; dérivée première ; dérivée seconde ; dérivées successives ;

• Dérivation de $f+g$; kf ; $f\times g$; $\frac{1}{f}$; $\frac{f}{g}$; $f^n(n\in\mathbb{Z}^*)$; $f(ax+b)$ et $\sqrt{f}$;

Capacités attendues

• Approcher une fonction au voisinage d'un point ;

• Reconnaitre que le nombre dérivée de la fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point dabscisse x_0 ;

• Reconnaitre les dérivées des fonctions de référence ;

• Maitriser les techniques de calcul de la dérivée de fonctions ;

• Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point et construire cette tangente ;

• Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de létude du signe de sa dérivée ;

• Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa courbe représentative ;

• Résoudre des problèmes concernant des valeurs minimales et des valeurs maximales ;

•Appliquer la dérivation dans le calcul de certaines limites ;

Recommandations pédagogiques

•Parmi les exemples à traiter ; On approchera les fonctions :

$h\longmapsto(1+h)^2$; $h\longmapsto(1+h)^3$; $h\longmapsto\dfrac{1}{1+h}$ et $h\longmapsto\sqrt{1+h}$ par des fonctions affines au voisinage de 0

• On démontrera les résultats :

- Si f est une fonction constante sur in intervalle I alors f' est nulle sur I

- Si f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I alors f' est positive sur I

- Si f est une fonction dérivable et décroissante sur un intervalle I alors f' est négative sur I

• On admettra les propriétés réciproques dans le cas où f est dérivable ;

Yassine Elamri

I Dérivabilité d'une fonction en un point

1 Nombre dérivé

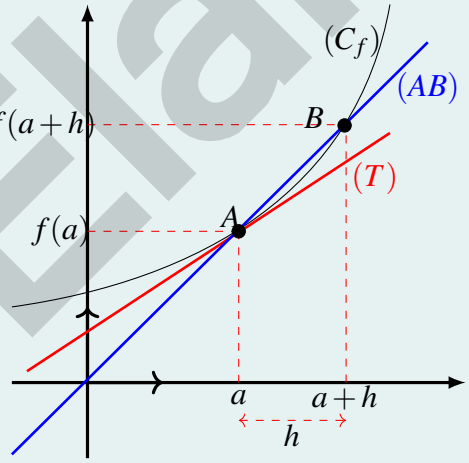
Définition

Le coefficient directeur α de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$.

Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé nombre dérivé. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.



$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(h)}{h}$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \quad ou \quad f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(h)}{h} = l$$

le réel l est appelé **le nombre dérivé** de f en a, on le note $f'(a)$.

Application

Déterminer $f'(a)$ dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = x^2$; $a = 4$

2 $f(x) = x^3$; $a = 1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

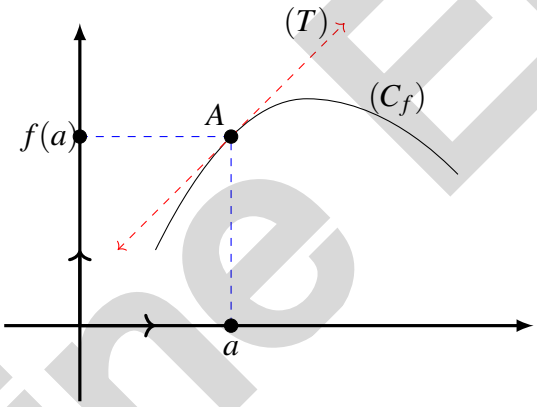
2 Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a appartenant à I.

1. la tangent à la courbe représentative de la fonction f au point $A(a, f(a))$ et la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.
2. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$



$$(T) : y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Application

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 1$

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

3 Dérivabilité à droite / à gauche en un point

Définition

1. Soit f une fonction définie sur un intevalle de la forme $[a; a+\alpha[$ tel que $\alpha > 0$. On dit que la fonction f est **dérivable à droite en** a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$
le réel l est appelé le nombre dérivé de f à droite en a, on le note $f'_d(a)$

Yassine Elamri

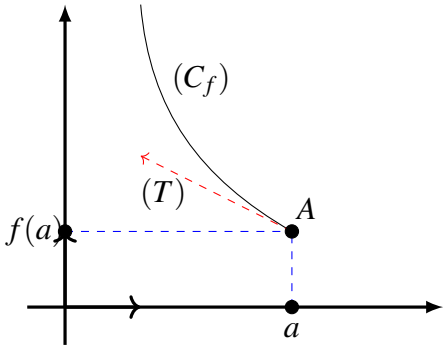
Today better than yesterday, tomorrow better than today

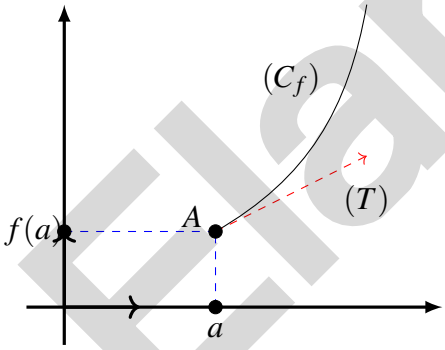
2 Soit f une fonction définie sur un intevalle de la forme $]a-\alpha;a]$ tel que $\alpha>0$. On dit que la fonction f est **dérivable à gauche en** a s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

le réel l est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a, on le note $f'_g(a)$

Interprétation géométrique :

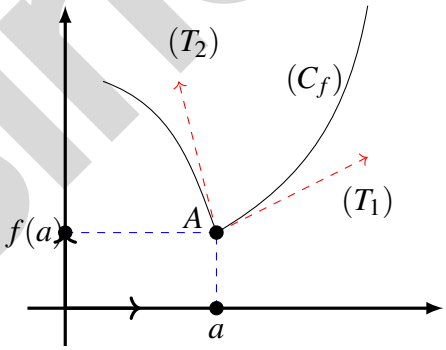
Si f une fonction dérivable à droite (ou à gauche) en a alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente au point $A(a,f(a))$ de coefficient directeur le nombre dérivé $f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$).





$$(T):\begin{cases} y=f'_g(a)(x-a)+f(a)\\ x\le a\end{cases}$$

$$(T):\begin{cases} y=f'_d(a)(x-a)+f(a)\\ x\ge a\end{cases}$$



$$\begin{cases}(T_1): y=f'_d(a)(x-a)+f(a)\ ;\ x\ge a\\ (T_2): y=f'_g(a)(x-a)+f(a)\ ;\ x\le a\end{cases}$$

Application

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x|$. étudier la dérivabilité de f en 0.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et a un élément de I.

On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$.

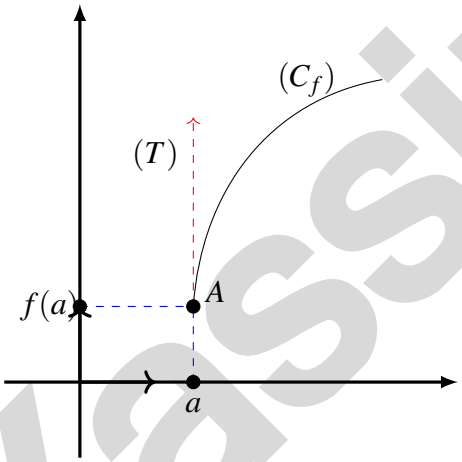
4 Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

1. Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à droite au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le haut.

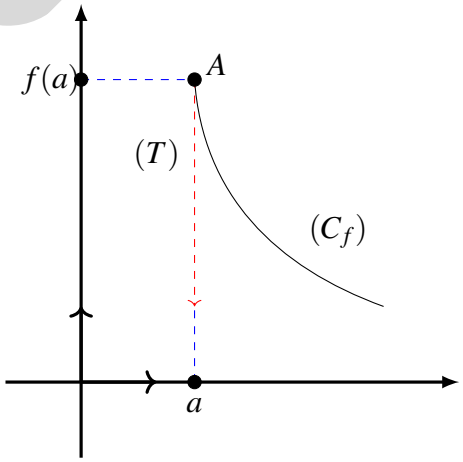
2. Si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à droite au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le bas.

3. Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à gauche au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le haut.

4. Si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet à gauche au point d'abscisse a, **une demi-tangente verticale** dirigée vers le bas.



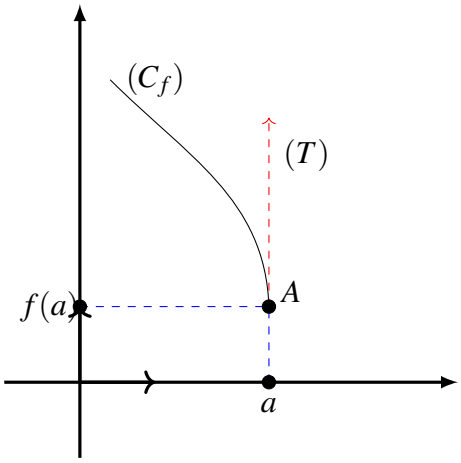
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$$



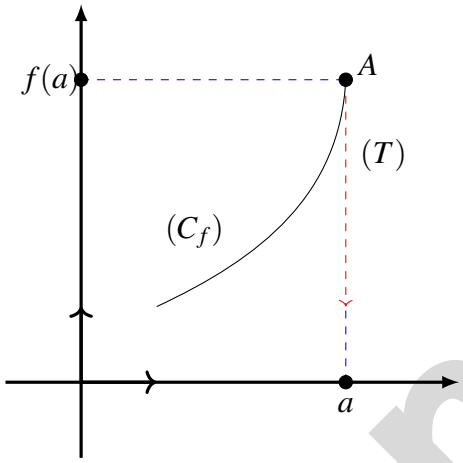
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$$

Application

Soit f une fonction définie sur $[-2;2]$ par : $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

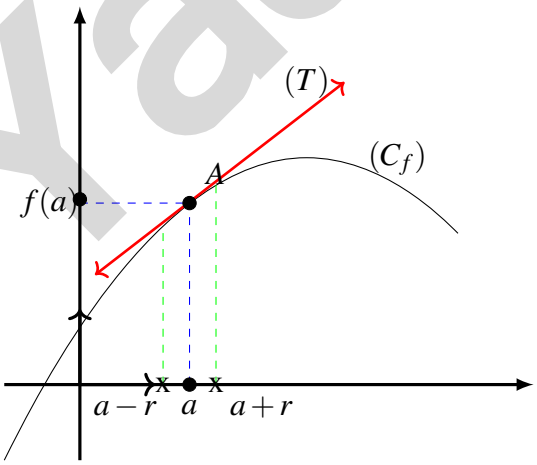
1. Montrer que f n'est pas dérivale à gouche en 2. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Montrer que f n'est pas dérivale à droite en -2. Interpréter géométriquement le résultat.

5 Approximation locale d'une fonction par une fonction affine

Définition

Soit f une fonction définie sur un intevalle I et dérivable en un réel a appartenant à I.

1. La fonction $x\longmapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est appelée la fonction affine tangente de f en a.
2. Une approximation affine de la fonction f au voisinage de a est donnée par : $f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$



Au voisinage de a , la courbe (C_f) et la droite (T) se confondent, d'où :

$$f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2$

1. Montrer que f est dérivable en $a = 0$ et en $b = 1$.
2. Expliciter les fonctions tangentes de f en a et en b.
3. donner une approximation affine de chacun des réels $(1.0004)^2$ et $(2.00001)^2$.

II **Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle - fonctions dérivées**

1 Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. On dit que une fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a;b[$.
2. On dit que une fonction f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a;b]$ si elle est dérivable :
   - a. En tout point de l'intervalle ouvert $]a;b[$.
   - b. A droite en a.
   - c. A gauche en b.
3. On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $[a;b[$ et $]a;b]$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x un élément de I. On appelle la dérivée de f la fonction, notée f', qui à pour tout x de I associe $f'(x)$ le nombre dérivé de f en x. $f' : x \longmapsto f'(x)$

2 Dérivées des fonctions usuelles

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans son domaine de définition et f' sa dérivée. Le tableau ci-dessous donne la dérivée des fonctions les plus courantes :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Fonction $f(x) =$	Dérivée $f'(x) =$	f est définie sur	f est dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$	
x	1	$\mathbb{R}$	
ax $(a \in \mathbb{R})$	a	$\mathbb{R}$	
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	

3 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. les fonctions $u+v$, uxv et kxu sont dérivables sur l'intervalle I, et on a pour tout x de I.

1. $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$.
2. $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.
3. $(k.u)'(x) = k.u'(x)$. Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et on a pour tout x de I.
4. $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x) = -\dfrac{v'(x)}{(v(x))^2}$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$.

Application

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1) $f(x)=3$ 2) $f(x)=3x$ 3) $f(x)=\frac{5}{2}x$ 4) $f(x)=x^2$

5) $f(x)=x^7$ 6) $f(x)=2x^3$ 7) $f(x)=3x+2$ 8) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

9) $f(x)=-x^2+x-\frac{7}{2}$ 10) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ 11) $f(x)=\frac{-x^2-x+1}{x+1}$ 12) $f(x)=\frac{4}{x}$

13) $f(x)=2x^5-\frac{x^3}{3}$ 14) $f(x)=(3x+2)x^2$ 15) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$ 16) $f(x)=\frac{-1}{x+1}$

Consèquences

1 Toute fonction polynôme est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

2 Toute fonction rationnelle est dérivable en tout point où elle est définie.

4 Dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Si u est strictement positive et dérivable sur I alors la fonction $\sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I),\ \left(\sqrt{u}\right)'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Application

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ *et* $g(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

1 Monter que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

2 Monter que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer sa dérivée.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

5 Dérivée de la fonction $x \longmapsto (u(x))^n$

Propriété

Soit n un entier naturel non nul.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction u^n est dérivable sur I, et on a :

$$\forall x \in I, ((u(x))^n)' = n.u'(x).(u(x))^{n-1}$$

Application

Déterminer l'expression de $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{2}x - \frac{\pi}{3}\right)^7$

2 $f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^5$

6 Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée sur I.

1 Si f' est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée dérivée seconde (ou dérivée dordre 2) de la fonction f.

2 Par itération, pour tout naturel $n \geq 2$, on définit la fonction dérive d'ordre n , notée $f^{(n)}$, comme étant la fonction dérivée de la fonction dérivée dordre $(n-1)$, et on a :

$$\left(f'\right)' = f^{(2)} \quad ; \quad \left(f^{(2)}\right)' = f^{(3)} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \left(f^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}$$

Application

Déterminer les dérivées dordre 1, 2 et 3 de la fonction f dans chacun des cas ci-après :

1 $f(x) = x^3 + x^2$

2 $f(x) = x^4 + x$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Applications

1 Sens de variations d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. La fonction f' est positive sur I si et seulement si la fonction f est croissante sur I.
2. La fonction f' est négative sur I si et seulement si la fonction f est décroissante sur I.
3. La fonction f' est nulle sur I si et seulement si la fonction f est constante sur I.

Remarque

- Si la fonction f' est strictement positive sur I (sauf en un nombre fini de points) alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction f' est strictement négative sur I (sauf en un nombre fini de points) alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^3$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
3. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Extremums d'une fonction sur un intervalle

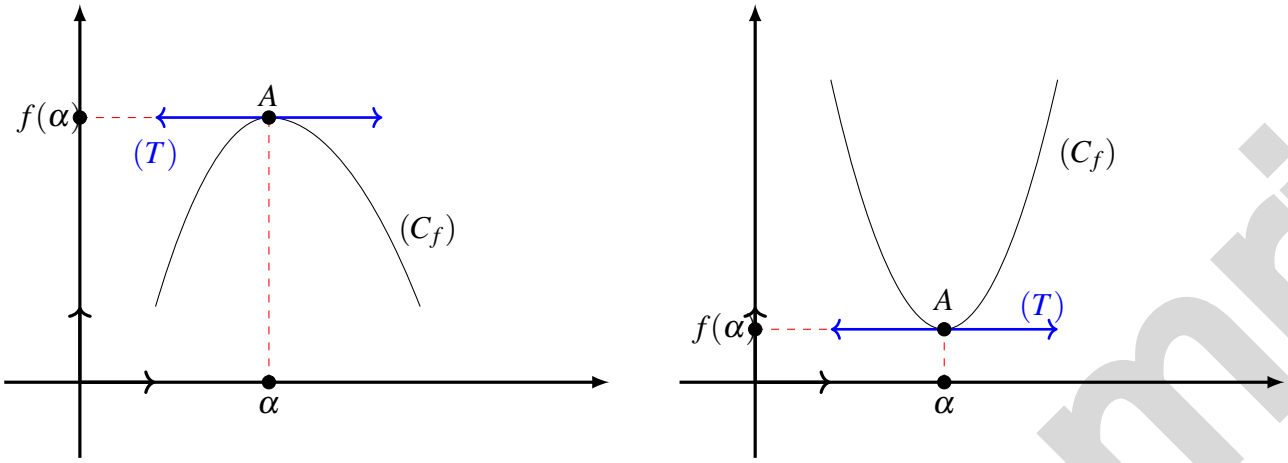
Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition et α un élément de I.

Si f admet un extremum en α alors $f'(\alpha) = 0$. En particulier, la tangente à la courbe représentative de f au point $(\alpha; f(\alpha))$ a pour pente $f'(\alpha) = 0$: c'est donc une droite horizontale.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



Remarque

La propriété précédente se voit directement sur le tableau de variations, en effet :

• Un minimum local correspond au cas où la dérivée s'annule en α et un peu avant la dérivée est négative (donc la fonction est décroissante) et un peu après α la dérivée est positive (donc la fonction est croissante .

• Le cas d'un maximum local est similaire : la dérivée s'annule aussi, mais elle est positive avant α et négative après.

Corolaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition et α un élément de I.

Si f' s'annule et change le signe en α alors f admet un extremum en α.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x$

1. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f admet un extremum sur chacun des intervalles $\left[-\frac{3}{2};0\right]$ et $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today