Chapitre

Les nombres complexes

I Introduction

Considérons les équations suivantes :

1. $x+2=0$
2. $4x+5=0$
3. $x^2-5=0$
4. $x^2+4=0$

- Dans $\mathbb{N}$ (ensemble des naturels), l'équation (1) n'admet pas de solution. On résout ce problème en créant les nombres négatifs. Dans $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers), cette équation a comme solution -2 .
- Dans $\mathbb{Z}$, l'équation (2) n'a pas de solution. On introduit les fractions. Dans $\mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels), cette équation a comme solution $-\frac{5}{4}$.
- Dans $\mathbb{Q}$, l'équation (3) n'a pas de solution. C'est pourquoi on introduit les nombres irrationnels. Dans $\mathbb{R}$ (ensemble des réels), l'équation (3) admet deux solutions : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
- Dans $\mathbb{R}$, l'équation (4) n'a pas de solution. C'est pourquoi on crée de nouveaux nombres : les nombres complexes. Ils forment l'ensemble $\mathbb{C}$ et permettent de déterminer les solutions de cette équation.

II L'ensemble $\mathbb{C}$

1 Définition

D — Définition

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2=-1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z=a+ib$ avec a et b réels.

Exemple

$3+4i; -2-i; \frac{i}{3}$ sont des nombres complexes.

Yassine Elamri

Vocabulaire

- L'écriture $a+ib$ d'un nombre complexe z est appelée la forme algébrique de z.
- Le nombre a s'appelle la partie réelle et le nombre b s'appelle la partie imaginaire. On note $\text{Re}(z)=a$ et $\text{Im}(z)=b$.

Remarque

- Si $b=0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a=0$ alors z est un nombre imaginaire pur.
- l'ensemble des nombres imaginaires purs est $i\mathbb{R}$: $i\mathbb{R}=\{\text{ iy }/y\in\mathbb{R}\}$

Application

Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

1. $z_1=3-5i-(3i-4)$
2. $z_4=(2i)^{13}$ $z_2=(3-2i)(-1+5i)$
3. $Z_5=\frac{1}{4-2i}$
4. $z_3=(2-3i)^2$
5. $Z_6=\frac{1+i}{2-i}$

2 Égalité de deux nombres complexes

Propriété

a) Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire c à d $(\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2)\ z=z'\Leftrightarrow \text{Im}(z)=\text{Im}(z')$ et $\text{Re}(z)=\text{Re}(z')$.
b) Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles c à d

$$(\forall z\in\mathbb{C}^2)\ z=0\Leftrightarrow \text{Im}(z)=0 \text{ et } \text{Re}(z)=0.$$

Exemple d'application :

Déterminons le nombre complexe z vérifiant $2z-5=4i+z$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Les opérations sur les nombres complexes

a Somme et produit

Propriété

On considère deux complexes z et z' de formes algébriques respectives $a+bi$ et $a'+b'i$.

- La somme de z et de z' est le complexe $z+z'=(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')\,i$
- Si k est un réel, alors le produit de k par z est le complexe $kz=k(a+bi)=ka+kbi$
- Le produit de z et de z' est le nombre complexe $zz'=(a+bi)\cdot(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)\,i$

Exemple

- $-1+7i+3-2i=2+5i$
- $(-1+7\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})=-3+2\mathrm{i}+24\mathrm{i}-14\mathrm{i}^2=14-3+23\mathrm{i}=11+23\mathrm{i}$
- $(3+2i)+(5-4i)=3+2i+5-4i=8-2i$
- $(-2+i)-(4-4i)=-2+i-4+4i=-6+5i$
- $(2-i)\cdot(3+4i)=6+8i-3i-4i^2=6+8i-3i+4=10+5i$

b Opposé et inverse d'un nombre complexe

Propriété

- L'opposé du nombre complexe $z=a+ib$ et $-z=-a-ib$
- Tout nombre complexe non nul $z=a+ib$ admet un inverse noté $\frac{1}{z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Exemple

- $z=\sqrt{3}+2i$ alors $-z=-\sqrt{3}-2i$ et $\frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{3}+2i}=\frac{\sqrt{3}-2i}{(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)}=\frac{\sqrt{3}-2i}{3-4i^2}=\frac{\sqrt{3}-2i}{7}=\frac{\sqrt{3}}{7}-\frac{2}{7}i$
- $\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i}{1-4i^2}=\frac{1-2i}{1+4}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ 3. Quotient de deux nombres complexes

c Quotient de deux nombres complexes

Propriété

On considère deux complexes z et z de formes algébriques respectives $a+bi$ et $a'+b'i$Avec $a'\neq 0$ et $b'\neq 0$ on a :

$$\frac{z}{z'}=\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{1}{a'^2+b'^2}\left((aa'+bb')+i\left(a'b-ab'\right)\right.$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

- $\frac{1+i}{\sqrt{3}+2i} = (1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i + \frac{\sqrt{3}}{7}i + \frac{2}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}\right)$
- $\frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} = \frac{3+6i-i+2}{1+4} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$

4 Représentation géométrique d'un complexe

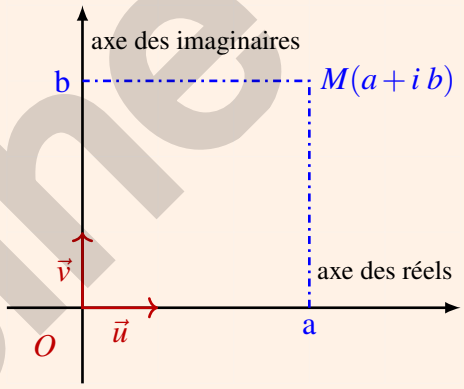
Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

a Affixe d'un point /affixe d'un vecteur

D **Définition**

a et b sont deux nombres réels.

- A tout nombre complexe $z = a+bi$ faisons correspondre le point M de coordonnées (a,b).
  M s'appelle l'image du nombre complexe z.
  On dit que z est l'affixe du point M est notée $\text{aff}(M)$ ou z_M



Remarque

1. L'axe (Ox) est appelé axe réel (c'est l'ensemble des points images des nombres réels).
2. L'axe (Oy) est appelé axe des imaginaires (c'est l'ensemble des points images des nombres imaginaires purs).
3. Les points images de nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

D **Définition**

a et b sont deux nombres réels.

- A tout nombre complexe $z = a + bi$ faisons correspondre le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a,b).
  On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ est notée aff($\vec{u}$) ou $Z_{\vec{u}}$

Exemple

- Le point $M(3;2)$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3+2i$.
- De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3+2i$.

Propriété

$M(Z_M)$ et $N(Z_N)$ sont deux points du plan.
$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.

1. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $Z_N - Z_M$.
2. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.
3. Le vecteur $k\vec{u}, k$ réel, a pour affixe kz.
4. Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_M+z_N}{2}$.

5 Application à la géométrie

Propriété

Soit $A(z_A), B(z_B)$ et $C(z_C)$
Les points A, B et C sont alignes si et seulement si $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} \in \mathbb{R}$

Exemple

- Soient les points A,B et C d'affixe respectives $Z_A = 6-i$ et $Z_B = 1-11i$ et $Z_C = 7+i$
  On a $Z_B - Z_A = -5-10$ i et $Z_C - Z_A = 1+2i$ alors $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = -\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$ donc les points A, B et C sont alignes
- Soient les points $M(z)$ et $A(1)$ et $N(z^2)$ on détermine l'ensemble des points M pour que les points M, A et N sont alignes
- Si $z = 0$ alors les points M et N sont confondus avec le point O Donc les points A,M et N sont alignes
- Si $z = 1$ alors les points A, M et N sont confondus
- Supposons que $z \neq 1$ et $z \neq 0$

  Les points A, M et N sont alignes si et seulement si $\frac{z^2-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ c à dz+1 $\in \mathbb{R}$C à d Im$(z+1) = 0$ si on considère $z = a+ib$ avec a et b sont des réels donc les points A, M et N sont alignes si et seulement si y = 0

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Donc l'ensemble des points M pour que les points A, M et N sont alignes est les points appartient à l'axe réel

Application

Démontrer que les points $M(z)$ tels que les points $M(z)$ et $B(i)$ et $M'(iz)$ sont alignes est un cercle à déterminer.

Propriété

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèle si et seulement si $\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}$.

Exemple

Soient les points A, B et C d'affixe respectives $Z_A = -2 + 6i$ et $Z_B = 4 - 3i$ et $Z_C = (2 - 3i)x$ avec x un nombre reel .
On a $Z_B - Z_A = 6 - 9i$ et $Z_C - Z_A = 1 + 2i$ alors $\frac{Z_C}{Z_B - Z_A} = \frac{x}{3} \in \mathbb{R}$
donc $(OC)//(AB)$

Application

On considère les points $A(-1), B(i)$ et soit $z \in \mathbb{C}$, et soient les points M et N d'affixes respectives z et z^2
Déterminer l'ensemble des points M pour que $(BM)//(AN)$

Propriété

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$
Les points A, B, C et D sont alignes ou cocycliques si et seulement si $\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_B} \times \frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} \in \mathbb{R}$

Exemple

Soient les points A,B ,C et D d'affixe respectives $a = 2 - 2i$ et $b = -1 + 7i$ et $c = 4 + 2i$ et $d = -4 - 2i$
Démontrons que les points A,B,C et D sont cocycliques
On a $\frac{c-b}{d-b} \times \frac{d-a}{c-a} = -1 \in \mathbb{R}$ donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

Propriété

- Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ alors $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$
- Si G est le barycentre de $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$ alors $Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
- En général Si G est le barycentre de $\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),(A_3;\alpha_3),\ldots,(A_n;\alpha_n)\}$ alors

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \ldots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

Soient les points A, B et C d'affixe respectives $a = 3+3i$ et $b = 5-2i$ et $c = 7+11i$
Le centre de gravité du triangle ABC est le point G d'affixe $z_G = \frac{a+b+c}{3} = 5+4i$

Application

Soient les points A, B et C d'affixe respectives $a = 3+7i$ et $b = 4+5i$ et $c = 3+7i$
Soit G est le barycentre de $\{(A;2),(B;1),(C;1)\}$ et H est le barycentre de $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$
Déterminer l'affixes des points G et H puis déterminer l'ensemble des points M du plan telles que

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

6 Conjugué d'un nombre complexe

D **Définition**

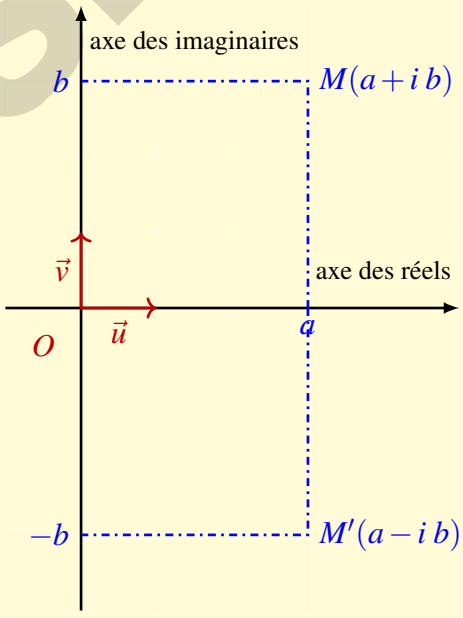
Soit un nombre complexe $z = a+ib$.
On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre, noté $\bar{Z}$, égal à $a-ib$.

Exemple

- $-z = 4+5i$ et $\bar{z} = 4-5i$
- On peut également noter : $\overline{7-3i} = 7+3i \quad \bar{i} = -i \quad \bar{5} = 5$

Remarque

Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Soit z et z ' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

1. $\overline{\bar{Z}} = Z$
2. $\overline{z+z'} = \bar{z}+\overline{z'}$
3. $\overline{z\times z'} = \bar{z}\times\overline{Z'}$
4. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
5. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, z\neq 0$
6. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{z'}, z'\neq 0$

Exemple

$\overline{(2+3i)(4-i)} = (2-3i)(4+i) = 11-10i$; $\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}+i}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}-i} = \frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{i}{3}$

$\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)} = \frac{1-i}{2+i} = \frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$; $\overline{(2+3i)^2} = (2-3i)^2 = -5-12i$

Propriété

1. z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
2. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{Z}$
3. $z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

Exemple

1. On démontre que $\forall n\in\mathbb{Z}Z = (\sqrt{3}+i)^{2n+1}-(i-\sqrt{3})^{2n+1}$ est un réel
   On $(i-\sqrt{3})^{2n+1} = (-1(\sqrt{3}-i))^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$
   Comme $(-1)^{2n+1} = -1$ alors $(i-\sqrt{3})^{2n+1} = -(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$
   Donc $z = (\sqrt{3}+i)^{2n+1}+(\sqrt{3}-i)^{2n+1}$
   Et on a

$$\bar{z} = \overline{(\sqrt{3}+i)^{2n+1}+(\sqrt{3}-i)^{2n+1}} = \overline{(\sqrt{3}+i)^{2n+1}}+\overline{(\sqrt{3}-i)^{2n+1}}$$

$$= (\sqrt{3}+i)^{2n+1}+(\overline{\sqrt{3}-i})^{2n+1} = (\sqrt{3}-i)^{2n+1}+(\sqrt{3}+i)^{2n+1} = z$$

   Donc $Z\in\mathbb{R}$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on détermine l'ensemble des points $M(z)$ tel que $2iz-\bar{z}\in\mathbb{R}$
   Posons $z' = 2iz-\bar{z}$ et soit $(E)l'$ ensemble des points $M(z)$ tel que $Z'\in\mathbb{R}$
   On a

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \overline{2iz - \bar{z}} = 2iz - \bar{z} \\ &\Leftrightarrow -2i\bar{z} - z = 2iz - \bar{z} \\ &\Leftrightarrow z - \bar{z} = -2i(z + \bar{z}) \\ &\Leftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}(z) = -4i\,\mathrm{Re}(z) \end{aligned}$$

Si on pose $z = x + iy$ avec x et y sont des réels
Alors $M \in (E) \Leftrightarrow y = -2x$ donc l'ensemble (E) est une droite d'équation $M \in (E) \Leftrightarrow y = -2x$

Application

1. Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \left(j^{2n} - j^n\right) \in i\mathbb{R}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{Z} = (1-i)z + 3 + 2i$

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Exercice

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2-i)(i-5) \quad z_2 = \frac{3+2i}{i}$$

Remarque

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels et z un nombre complexe
On a $\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}$
Comme $\overline{(z^p)} = (\bar{z})^p$ et $\overline{a_p} = a_p$ alors $\overline{P(z)} = a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_1\bar{z} + a_0 = P(\bar{z})$
Alors on déduit que $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$
Si α un nombre complexe tel que $P(\alpha) = 0$ alors $\overline{P(\alpha)} = P(\bar{\alpha}) = 0$ on déduit que si un nombre complexe α est une racine à un polynôme P alors sont conjugué $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

7 Module d'un nombre complexe

a Définition et interprétation géométrique

D **Définition**

Soit z un nombre complexe quelconque de forme algébrique $z = a + ib$.
On appelle module de z le nombre réel noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Interprétation géométrique : Dans le plan complexe, si M a pour affixe z alors $OM = |z|$.

Propriétés géométriques

- Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque d'affixe z. Alors $\|\vec{w}\| = |z|$
- Soient A et B deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B. Alors : $AB = |Z_B - Z_A|$

Exemple

- Soient A et B les points d'affixes $2 - 3i$ et $5 - i$. Etudions la nature du triangle OAB :
- $OA = |z_A| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$
- $OB = |z_B| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$
- $AB = |z_B - z_A| = |(5 - i) - (2 - 3i)|. = |3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
- On remarque ainsi que : $OA = AB$ et $OB^2 = OA^2 + AB^2$. Le triangle OAB est donc rectangle isocèle rectangle en A

8 Propriétés

Propriété

Pour tout nombre complexe z,

- $|z|^2 = z \times \bar{Z}$
- $|z|$ est toujours positif et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- Si z est un nombre réel, alors le module de z coïncide avec la valeur absolue de z.
- Si z est un imaginaire pur, alors le module de z est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire.
- Si M est le point d'affixe z, alors $OM = |z|$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. $|z\times z'| = |z|\times|z'|$;
2. Pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$
3. Si $z\neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;
4. Si $z'\neq 0$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

Exemple

A l'aide de ces propriétés, calculons les modules des nombres complexes suivants :

- $|(3+i)(1-i)| = |3+i||1-i| = \sqrt{3^2+1^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{10}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{5}$.
- $\left|(2+i)^4\right| = |2+i|^4 = \left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^4 = 25$; $\left|\frac{1}{5-i}\right| = \frac{1}{|5-i|} = \frac{1}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$.
- $\left|\frac{3+i}{1-i}\right| = \frac{|3+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$.

9 Exercice corrigé

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z+5i| = 6$
   Soit A le point d'affixe $Z_A = -5i$. Alors, pour tout nombre complexe z, $|z+5i| = |z-z_A|$.
   Donc : $|z+5i| = 6 \Leftrightarrow |z-z_A| = 6 \Leftrightarrow AM = 6$. On en conclut que l'ensemble des points M répondant à la question est le cercle de centre A et de rayon 6 .
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z
   Vérifie : $\left|\frac{3z-i}{z+1-i}\right| = 3$
   Il faut tout d'abord éliminer le point A d'affixe $-1+i$, car pour cette valeur de z le quotient précédent n'existe pas .
   Ensuite, pour tout $z\neq -1+i$, on peut écrire :
   $\left|\frac{3z-i}{z+1-i}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{|3z-i|}{|z+1-i|} = 3 \Leftrightarrow |3z-i| = 3|z+1-i|$
   $\Leftrightarrow 3\left|z-\frac{i}{3}\right| = 3|z+1-i| \Leftrightarrow \left|z-\frac{i}{3}\right| = |z+1-i|$
   En appelant B le point d'affixe $\frac{i}{3}$, la dernière égalité équivaut à : $BM = AM$. On en conclut que l'ensemble des points M cherché est la médiatrice Δ du segment $[AB]$ privée éventuellement du point A qui a été exclu dès le début. Mais comme A $\notin \Delta$, l'ensemble des solutions est toute la droite Δ.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1 Argument d'un nombre complexe non nul

D **Définition**

Soit z un nombre complexe non nul et M le point du plan complexe d'affixe z. On appelle argument de z, tout réel θ
tel que : $\theta = (\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM})[2\pi]$. On note alors $\arg(z) = \theta[2\pi]$

Remarque

Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments ; si θ est l'un d'entre eux tout autre est de la forme
$\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π) ou plus simplement $\arg(z) = \theta$.

- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument ..

Exemple

$1+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, donc : $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Cas particuliers :

$\arg(1) = 0[2\pi], \arg(-1) = \pi[2\pi], \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi], \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Propriété

Soit $z \in C^*$ quelconque. Alors :

- $z \in \mathrm{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$ et $z \in i\mathrm{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)[2\pi]$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$

2 Repérages cartésiens et polaire

Dans le plan complexe, un point M distinct de O peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x ; y) ou par un couple $(r;\theta)$ de coordonnées polaires avec $OM = r$, $(\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \theta$, on a alors
$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

3 Forme trigonométrique

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul . Alors il existe un réel strictement positif r et un réel θ tel que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Soient z et z ' deux nombres complexes tels que
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec r et r' strictement positifs . Alors :
$z = z' \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta \equiv \theta'[2\pi]$

a Définition

D **Définition**

L'écriture de z sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où r est un réel strictement positif et θ un réel quelconque s'appelle forme trigonométrique de z.

Exemple

Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- Si $z = 3$, alors $a = 3$ et $b = 0$. Donc $r = \sqrt{3^2+0^2} = 3, \cos\theta = \frac{3}{3} = 1$ et $\sin\theta = \frac{0}{3} = 0$, ce qui donne $\theta \equiv 0[2\pi]$. On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$.
- Si $Z = -4$, alors $a = -1$ et $b = 0$. Donc $r = \sqrt{(-4)^2+0^2} = 4, \cos\theta = \frac{-4}{4} = -1$ et $\sin\theta = \frac{0}{4} = 0$, ce qui donne $\theta \equiv \pi[2\pi]$. On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$.
- Si $Z = 2i$, alors $a = 0$ et $b = 2$. Donc $r = \sqrt{0^2+2^2} = 2, \cos\theta = \frac{0}{2} = 0$ et $\sin\theta = \frac{2}{2} = 1$, ce qui donne $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.
- Si $z = -1 + i$, alors $a = -1$ et $b = 1$. Donc $r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}, \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne $\theta \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$. On en conclut que la forme trigonométrique de z est : $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Propriété (argument et opérations)

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel quelconque. Alors :

$$\arg\left(z \times z'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right)[2\pi]; \quad \arg\left(z^n\right) = n \times \arg(z)[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right)[2\pi]$$

Conséquence

$$\arg(k \times z) = \begin{cases} \arg(z)[2\pi] \text{ si } k > 0 \\ \arg(z) + \pi[2\pi] \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

Exemple

1 Soient $z = 1 + i$ et $z' = \sqrt{3} - i$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
Calculons $\arg(z),\arg(z'),\arg(zz')$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$:
$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
Comme $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, alors
D'où $\arg(z)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$ De même $|z'|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=2$. Alors :
$z'=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right.$. D'où
$\arg(z')=-\frac{\pi}{6}[2\pi]$
Il en découle que
$\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')=\frac{\pi}{12}[2\pi]$ et que
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')=\frac{5\pi}{12}[2\pi]$.
Les calculs précédents permettent alors de calculer le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$ et de $\frac{5\pi}{12}$. Pour cela, il suffit de déterminer les formes algébriques et trigonométriques de $Z\times Z'$ et de $\frac{Z}{Z'}$:
Comme $|z\times z'|=|z|\times|z'|=2\sqrt{2}$ et que $\arg(z\times z')=\frac{\pi}{12}[2\pi]$, alors la forme trigonométrique de $Z\times Z'$ est :
$z\times z'=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. Mais sa forme algébrique est
$z\times Z'=(1+i)(\sqrt{3}-i)=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$. Par
identification, on obtient alors : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
En suivant la même démarche, on a :
$\frac{z}{z'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ d'une part et
$\frac{z}{z'}=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
d'autre part . En identifiant, on conclut alors que
$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et que $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

2 Calculons $(\sqrt{3}-i)^6$ en déterminant son module et un de ses arguments :
$\left|(\sqrt{3}-i)^6\right|=|\sqrt{3}-i|^6=2^6=64$ et
$\arg\left((\sqrt{3}-i)^6\right)=6\arg(\sqrt{3}-i)=6\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi[2\pi]$
Donc : $(\sqrt{3}-i)^6=64(\cos\pi+i\sin\pi)=-64$.

Propriété

Pour tous points A, B, C et D du plan complexe distincts deux à deux, on a :

$$\arg(z_B-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AB})[2\pi] \text{ et } \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})[2\pi]$$

Exemple

Soient A,B et C les points du plan complexe d'affixes respectives $z_A=1+3i, z_B=3+i$ et $Z_C=4+2i$. Démontrons que ABC est un triangle rectangle.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

La figure semble indiquer que l'angle droit est au sommet B . C'est pourquoi nous allons calculer :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) &= \arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right) = \arg\left(\frac{(4+2i)-(3+i)}{(1+3i)-(3+i)}\right)\\ &= \arg\left(\frac{1+i}{-2+2i}\right) = \arg\left(\frac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}\right)\\ &= \arg\left(\frac{-4i}{(-2)^2+2^2}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{Le}\end{aligned}$$

triangle ABC est donc rectangle en B.

Propriété

- A, B et C (distincts) sont alignés ssi $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right) = 0 \quad (\pi)$.
- A, B et C (distincts), (BC) et (AC) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.
- A, B, C et D (distincts), (AB) et (CD) sont parallele ssi $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_A-z_B}\right) = 0 \quad (\pi)$.
- A, B, C et D (distincts), (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_A-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

4 Forme exponentielle d'un nombre complexe :

5 Exponentielle complexe

Soit f la fonction définie de R dans $\mathbf{C}$ par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Alors :

$$\begin{aligned}f(\theta)\times f(\theta') &= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta)\\ &= \cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta') = f(\theta+\theta')\end{aligned}$$

Cette fonction f possède donc la propriété caractéristique des fonctions exponentielles. Pour cette raison, on posera :

D — Définition

Soit θ un réel quelconque. On appelle exponentielle de $i\theta$ le nombre complexe noté $e^{i\theta}$ défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Les nombres de la forme $e^{i\theta}$ sont appelés exponentielles complexes.

Exemple

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cas particuliers : $e^{i0} = 1, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Conséquence

Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta[2\pi]$

Propriété

Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier naturel n , on a :

1. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
2. $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$;
3. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4. $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
5. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

a **Remarques :**

Remarque

- La propriété 3 permet de retrouver rapidement les formules d'addition des sinus et cosinus, ceci en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres :
$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \Leftrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta) \times \left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right) = \cos\left(\theta+\theta'\right) + i\sin\left(\theta+\theta'\right)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos\left(\theta+\theta'\right) \\ \cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta' = \sin\left(\theta+\theta'\right) \end{cases}$
- La propriété 4 , pour $n = 2$, permet par identification des parties réelles et imaginaires des deux membres, de retrouver les formules duplication
- $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{i2\theta} \Leftrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) \\ 2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta) \end{cases}$
La propriété 4 est connue sous le nom de formule de Moivre ; elle peut aussi s'écrire :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemple

Calculons $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$ en utilisant son écriture exponentielle :

Comme $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Propriété (Formules d'Euler)

Pour tout réel θ, on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Yassine Elamri

Today bethttps://steinmath.com row better than today

Exemple

Soit $Z = 1 + e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Ecrivons Z sous forme trigonométrique :
$Z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2\cos\theta = 2\cos\theta\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$, ce qui est la forme trigonométrique de Zcar, θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $2\cos\theta$ est strictement positif et est donc bien égal au module de Z.

Application

Linéariser le polynôme $P = \cos^2 5x \sin 3x$.

6 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sa forme trigonométrique, avec $r > 0$. Alors, avec les notations introduites précédemment, on peut aussi écrire que $z = re^{i\theta}$.

D — Définition

Soit z un nombre complexe non nul . Notons $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$. Alors l'écriture de z sous la forme $z = re^{i\theta}$ s'appelle forme exponentielle de z

Exemple

$$2 = 2e^{i0}, -3 = 3e^{i\pi}, 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}, 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Les propriétés énoncées ci-dessous sont faciles à mémoriser du fait de leur similarité avec les propriétés des puissances. De plus, elles permettent de résumer conjointement les propriétés des modules et des arguments ; il suffit d'avoir à l'esprit que lorsque la forme exponentielle de z est $Z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$), cela signifie que $|z| = r$ et que $\arg(z) = \theta[2\pi]$

Propriété

Soient z et z ' deux nombres complexes non nuls de formes exponentielles $z = re^{i\theta}$ et $Z' = r'e^{i\theta'}$ et soit n un entier naturel non nul . Alors :
$\bar{Z} = re^{-i\theta}$; $-Z = re^{i(\theta+\pi)}$; $Z \times Z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; $Z^n = r^n e^{in\theta}$; $\frac{1}{Z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$; $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Exemple

En utilisant ces propriétés, déterminons la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
$(-1+i)^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i\frac{24\pi}{4}} = 2^4 e^{6i\pi} = 16e^{i0}$
$\frac{2-2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

IV Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ l'ensemble des complexes de module 1 (les affixes des points du cercle trigonométrique).

D Définition

soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$ on appelle racine n-ième de l'unité toute solution complexe del'équation $z^n = 1$ d'inconnue z. l'ensemble des racine n-ième de l'unité est noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}/z^n = 1\}$

a Etude des cas particulier $n \in \{2;3;4\}$

- Cas $N = 2$

  Les racines carrés de l'unité sont les solutions de l'équation $z^2 = 1$ dans $\mathbb{C}$

  Les solutions de l'équation $z^2 = 1$ dans $\mathbb{C}$ sont 1 et -1 et $\mathbb{U}_2 = \{-1;1\}$

- Cas $n = 3$

  On considère l'équation $(E_3) : z^3 = 1$ si z est une solution de l'équation (E_3) alors : $|z^3| = 1$c à d $|z|^3 = 1$ donc $|z| = 1$ car $|z|$ est un nombre réel positif .

  Donc toutes les solutions de l'équation (E_3) s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $e^{i3\theta} = 1$c à d $3\theta = 0[2\pi]$ Donc $\theta = k\frac{2\pi}{3}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

  Les racines cubiques de l'unité sont des nombres complexes $e^{ik\frac{2\pi}{3}}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.posons $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{3}} = (\omega_1)^k$ tel que $k \in \mathbb{Z}\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on note à $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\omega_2 = j^2 + \bar{j}$ et $\omega_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1$ et $\omega_4 = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i2\pi} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j = \omega_1$ et $\omega_5 = \omega_2$ donc en général $(\forall p \in \mathbb{Z})$ $\begin{cases} \omega_{3p} = e^{ip(2\pi)} = 1 \\ \omega_{3p+1} = e^{ip(2\pi)} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \\ \omega_{3p+2} = e^{ip(2\pi)} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 \end{cases}$ tel que $\mathbb{Z} = \{3p \bigcup 3p+1 \bigcup 3p+2/p \in \mathbb{Z}\}$ et par suite $\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$

Remarque

- L'inverse d'un élément de $\mathbb{U}_3$ est un élément de $\mathbb{U}_3$: $\frac{1}{j^2} = j, \frac{1}{j} = \bar{j} = j^2$
- Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_3$ est un élément de $\mathbb{U}_3$
- Comme $|j^2| = |j| = |1| = 1$ alors les points A_0, A_1 et A_2 d'affixes respectives $1, j$ et

j'ppartiennent au cercle trigonométrique et on a

$$\begin{aligned} \overline{\left(\overrightarrow{A_0A_1}; A_0A_2\right)} &\equiv \arg\left(\frac{j^2-1}{j-1}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(j+1)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(-j^2\right)[2\pi] \end{aligned}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Et comme $-j^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors $\arg\left(-j^2\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

- Cas $n = 4$

On considère l'équation $(E_4) : z^4 = 1$ si z est une solution de l'équation (E_4) alors : $\left|z^4\right| = 1$ c à d $|z|^4 = 1$ donc $|z| = 1$ car $|z|$ est un nombre réel positif .

Donc toutes les solutions de l'équation (E_4) s'écrit sous la forme $e^{i\theta}$ et vérifient $e^{i4\theta} = 1$c à d $3\theta = 0[2\pi]$ Donc $\theta = k\frac{2\pi}{4}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Les racines d'ordre 4 de l'unité sont des nombres complexes $e^{i\frac{2\pi}{4}}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.posons $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = (\omega_1)^k$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\omega_2 = i^2 = -1$ et $\omega_3 = i^3 = -i$ et $\omega_4 = i^4 = 1$ et $\omega_5 = i$ et $\omega_6 = -1$ et $\omega_7 = -i$

En général : si r est le reste de la division euclidienne de k par 4 alors $k = 4p + r$ avec $0 \leq r \leq 3$ alors donc $\omega_k = i^r$ et par suite $\mathbb{U}_4 = \{1; i; -i; 1\}$

Remarque

- L'inverse d'un element de $\mathbb{U}_4$ est un element de $\mathbb{U}_4$
- Le produit de deux element de $\mathbb{U}_4$ est un element de $\mathbb{U}_4$
- La points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'affixes respectives 1, i, -1 et $-$i sont des somets de carré circonscrit par le cercle trigonométrique

Propriété

Le nombre de racines n'ième de l'unité est n est s'écrit sous la forme $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ tel que $k \in \mathbb{N}$
c à d $\mathbb{U}_n = \left\{e^{ik\frac{2\pi}{n}} / k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq n-1\right\}$ et card $\mathbb{U}_n = n$

Propriété

- Le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est un élément de $\mathbb{U}_n$
- L'inverse d'un élément de $\mathbb{U}_n$ est un élément de $\mathbb{U}_n$.

Remarque

si on pose $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ alors $\frac{1}{\omega_k} = \overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ pour tout k de $\{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$ on pose $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = (\omega_1)^k$
Pour tout nombre relatif m on pose $S(m) = (\omega_0)^m + (\omega_1)^m + (\omega_2)^m + \ldots + (\omega_{n-1})^m$

- Si m est n'est pas divisible par n alors $S(m) = 0$
- Si m est divisible par N alors $S(m) = n$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

Les racine d'ordre 8 de l'unité sont $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ tels que $0 \leq k \leq 7$
$\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \omega_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \omega_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ et $\omega_4 = e^{i\pi} = -1; \omega_5 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$;
$\omega_6 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i; \omega_7 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$
Remarque que $\omega_7 = \bar{\omega}_1$ et $\omega_6 = \overline{\omega_2}$ et $\omega_5 = \overline{\omega_3}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ pour tout k de $\{0;1;2;\ldots;n-1\}$ on pose $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = (\omega_1)^k$ et M_k le point d'affixe ω_k Les points $M_0, M_1, \ldots$ et M_{n-1} sont des sommet de polygone régulier circonscrit par le cercle trigonométrique

2 Racine n'iéme d'un nombre complexe non nul

On veut déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, c'est-à-dire des nombres $z' = R(\cos\theta' + i\sin\theta')$ tels que $(z')^n = z$ équivaut à $r(\cos\theta + i\sin\theta) = R^n(\cos n\theta' + i\sin n\theta')$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = R\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$$

$$\begin{cases} R^n = r \\ n\theta' = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta+2k\pi}{n} \end{cases}$$

$$Z' = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+k2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+k2\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1$$

Propriété

Soit z un nombre complexe d'argument θ : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$
Les racines n'ieme de z sont des nombres complexes $z_k' = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+k2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+k2\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1$

Conclusions

- Tout nombre complexe a n racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes : pour les trouver, il suffit de remplacer dans l'expression précédente k par $0, 1, .., n-1$.
- Les points images de ces racines $n^{\text{ièmes}}$ sont les n sommets d'un n-gone régulier inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et de centre O

Remarque

Déterminer les racines cubiques de $z = 1+i$.

- Recherchons d'abord la forme trigonométrique de ce nombre. Il vient succes-

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

sivement :

$$z = 1+i \quad : \quad a = 1, \quad b = 1$$
$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- Il est maintenant facile de déterminer les racines cubiques demandées :

$$z' = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

ce qui donne :

- $k=0 \quad z'_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
- $k=1 \quad z'_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$
- $k=2 \quad z'_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$
- On peut représenter les solutions sur un cercle de rayon $\sqrt[6]{2}$

Application

1. Déterminer les racines cubiques de nombre complexe $1-i$
2. Déterminer les racines d'ordre n de -1 tel que $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$
3. Déterminer les racines d'ordre 6 de l'unité et écrire le résultat sous forme trigonométrique et algébrique puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 = 0$

V L'équation de second degré dans

1 Racine carrée

Un nombre complexe admet toujours deux racines carrées opposées.

Note

Dans le cas où z est un réel, les racines sont faciles à calculer. Dans les autres cas, il est aisé de voir que les racines carrées seront de la forme $x+iy$ avec $xy \neq 0$.

a Exemples

- Les racines carrées de - 3 sont $\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$ car $(\sqrt{3}i)^2 = -3$ et $(-\sqrt{3}i)^2 = -3$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

▶ Recherchons les racines carrées de $3+4i$

Méthode 1 : on cherche un nombre complexe $x+yi$ tel que $(x+yi)^2 = 3+4i$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=3 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\frac{4}{x^2}=3 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}$$

$x_1^2 = \frac{3+5}{2} = 4$ et $x_2^2 = \frac{3-5}{2} = -1$

Comme x_2 est un nombre réel, $x_2^2 = -1$ est à rejeter. $x_1^2 = 4$ d 'ou $x = 2$ ou $x = -2$

Pour $x = 2$, on trouve $y = \frac{2}{2} = 1$.

Pour $x = -2$, on trouve $y = \frac{2}{-2} = -1$.

Les racines carrées sont donc : $2+i, -2-i$

Méthode 2 : on cherche un nombre complexe $x+yi$ tel que $(x+yi)^2 = 3+4i$

$-y^2) = 3$
$y^2) = -4$
0

produit est -4 On obtient

' 'équation $az^2+bz+c=$
scriminant $\Delta = b^2-4ac$.

ions complexes.

mme
elle-

donc

Δ Δ o

$$z_1 = \frac{-b}{2a} = z_2$$

http

Today better than yesterday, tomorrow better than today

► Si $\Delta < 0$ alors ,alors $\Delta = -(-\Delta) = i^2(-\Delta) = (\sqrt{i(-\Delta)})^2$ car $-\Delta > 0$ et on peut reprendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ On retrouve donc que

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

a

Exemple 1 :

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1 $z^2 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow Z^2 = -5$

$\Leftrightarrow Z^2 = 5i^2$

$\Leftrightarrow Z = i\sqrt{5}$ ou $Z = -i\sqrt{5}$

Les solutions sont donc $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$.

2 $z^2 + 3z + 4 = 0$

On calcule de discriminant Δ du trinôme :

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjugués :

$z_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ et

$z_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$

Exemple

Résolution de l'équation $z^2 - i = 0$

Discriminant $\Delta = 0^2 - 4(i) = 4i$

Pour trouver δ, il s'agit d' 'écrire i comme un carré.

Or puisque $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ on a

$i = e^{\frac{i\pi}{2}} = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Comme $\Delta = 4$i, on peut donc prendre

$\delta = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$

L'équation $z^2 - i = 0$ admet donc deux solutions complexes $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Exemple

Résolution de l'équation

$$z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$$

Discriminant $\Delta = (3\text{i} - 4)^2 - 4 \times 1 \times (1 - 7\text{i})$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$= 7 - 24\mathrm{i} - 4 + 28\mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i}$. Pour chercher δ, on l'écrit sous la forme $\delta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ avec α et β des réels. Alors

$\delta^2 = \Delta \Longleftrightarrow (\alpha + \mathrm{i}\beta)^2 = 3 + 4\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = 3 + 4i$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 3 \text{ et } 2\alpha\beta = 4$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 3 \text{ et } \beta = \frac{2}{\alpha}$$

$\Longleftrightarrow \alpha^2 - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 = 3$ et $\beta = \frac{2}{\alpha}$

$\Leftarrow \alpha^4 - 3\alpha^2 - 4 = 0$ et $\beta = \frac{2}{\alpha}$

Or en posant $\mathrm{X} = \alpha^2$ 1"équation précédente devient $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} - 4 = 0$, qui est une 'équation du second degré à coefficients réels. Après calculs du discriminant et des racines, on obtient

$X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4)$.

Par conséquent $\alpha^4 - 3\alpha^2 - 4 = \left(\alpha^2 + 1\right)\left(\alpha^2 - 4\right)$.

Comme α est réel, on en d'déduit que

$\delta^2 = \Delta \Longleftrightarrow \left(\alpha^2 + 1\right)\left(\alpha^2 - 4\right) = 0$ et $\beta = \frac{2}{\alpha}$

$\Leftarrow \alpha^2 - 4 = 0$ et $\beta = \frac{2}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha = 2 \text{ et } \beta = \frac{2}{2} = 1\right)$$
$$\text{ou } \left(\alpha = -2 \text{ et } \beta = \frac{2}{-2} = -1\right)$$

On peut donc prendre $\delta = 2 + \mathrm{i}$.

L'équation $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$

admet donc deux solutions complexes

$$z_1 = \frac{4 - 3i + 2 + i}{2} = 3 - i$$
$$\text{et } z_2 = \frac{4 - 3i - 2 - i}{2} = 1 - 2i$$

Exercice

On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$$P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}.$$

1. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait

$$P(z) = (z - i\sqrt{2})\left(z^2 + az + b\right).$$

3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

VI Transformations planes

1 Translation

On considère $M(z), M'(z')$ et $B(b)$.
M' ' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ équivaut à $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MM'}$ ' ca d $z'-z=b \Leftrightarrow z'=z+b$
cette écriture s' appelle l'écriture complexe de cette translation.

a Propriété (translation)

Propriété

On considère $M(z), M'(z')$ et $B(b)$.
L'égalité $z'=z+b$ équivaut à dire que M' 'est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
$Z'=z+b$ est l'écriture complexe de cette translation.

2 Homothétie

On considère $M(z), M'(z'), \Omega(\omega)$ et k un réel non nul.
M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k donc on a
$\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M}$ c à d $z'-\omega = k(z-\omega)$ cette écriture s'appelle l'écriture complexe de cette homothétie.

Propriété

On considère $M(z), M'(z'), \Omega(\omega)$ et k un réel non nul.
L'égalité $z'-\omega = k(z-\omega)$ équivaut à dire que M ' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
$z'-\omega = k(z-\omega)$ est l'écriture complexe de cette homothétie.

Exemple

soit $\Omega(1+3i)$.
L'homothétie de rapport 2 et de centre Ω transforme M (z) en M' (z') tels que :
$z'-(1+3i) = 2(z-(1+3i))$
i.e. $z' = 1+3i+2z-2-6i$
i.e. $z' = 2z-1-3i$
L'image de $K(7-i)$ est le point d'affixe $z' = 2(7-i)-1-3i = 14-2i-1-3i = 13-5i$.

3 Rotation

la rotation r d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω
$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation r c à d

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1.e^{i\theta} \Leftrightarrow z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega).$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

On considère $M(z), M'(z'), \Omega(\omega)$ et θ un réel.
L'égalité $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ équivaut à dire que M' est l'image de M dans la rotation de centre Ω et d'angle θ $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ est l'écriture complexe de cette rotation.

a

Conséquences :

- ABC est un triangle équilatéral ssi :
  - B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ssi
  $$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$
  - B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, ssi
  $$z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$
- ABC est rectangle et isocèle en A ssi
  - B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, ssi
  $Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$
  - B a pour image C dans la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, ssi
  $$Z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - Z_A).$$

Propriété

Soit φ une transformation du plan d'écriture $z' = az+b$ tels que a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 0$

1. Si $a = 1$ alors φ est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$
2. Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors φ est une homothétie de rapport a et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$
3. Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors φ est une rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\theta = \arg a$
4. Si $|a| \neq 1$ alors $\varphi = \text{RoH} = \text{HoR}$ tels que H est l'homothétie de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de rapport $|a|$ et R est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $\theta = \arg a$

Application

Soit F une transformation du plan définie par son écriture complexe.
Déterminer la nature de F et ses éléments caractéristiques

1. $Z' = Z - 1 + iz$;
2. $z' = \frac{3}{2}z + 1 - i$
3. $z' = (\sqrt{3}-i)z + 1 + \sqrt{3}i$
4. $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 2i$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today