CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

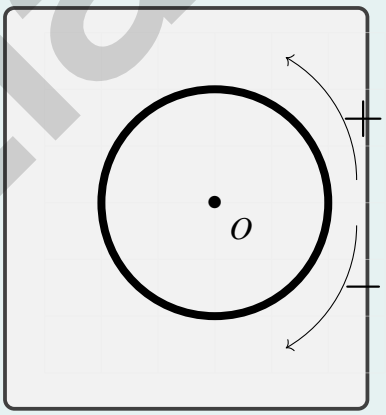
Dans tous ce qui suis le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et on note I et J les points tel que : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$

I Le cercle trigonométrique

1 Cercle orienté et plan orienté.

Définition

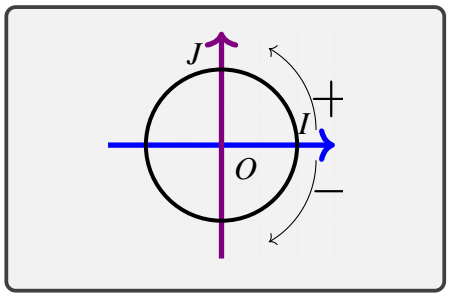
- Soit (C) un cercle sur le plan
  Le cercle (C) est dit orienté si on choisit sur (C) un sens positif, appelé aussi sens direct.
- On choisit en général le sens positif, le sens contraire de rotation des aiguilles d'une montre, l'autre sens est appelé sens négatif ou indirect.
- Orienter le plan, c'est faire le choix du même sens de parcours pour tous les cercles du plan.



2 Cercle trigonométrique

Définition

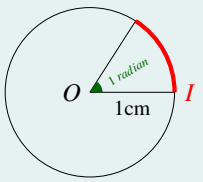
Le cercle trigonométrique lié au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est le cercle de centre O et de rayon égal à l'unité de longueur, orienté dans le sens positif.



3 Le radian

Définition

Un radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur égal à l'unité de longueur c'est à dire égal au rayon du cercle trigonométrique.



Yassine Elamri

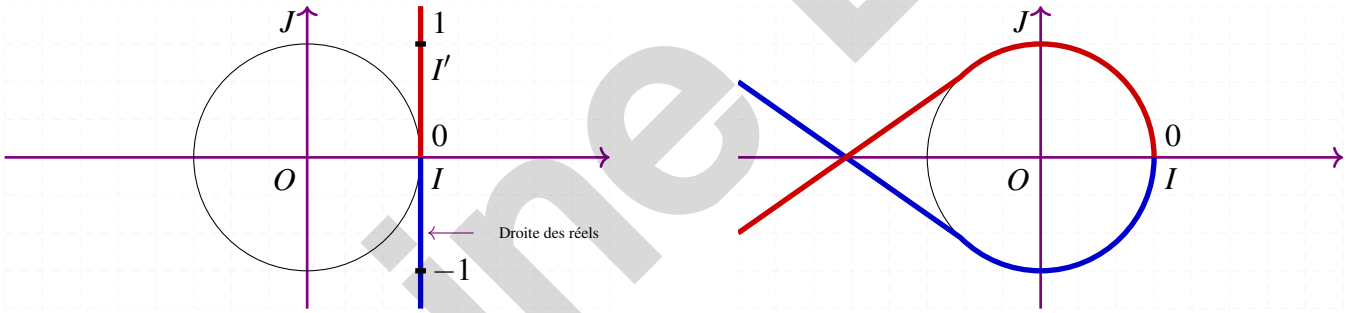
Remarque

- Il existe une unité de mesure des angles autre que le radian et le degré, elle est appelée le grade. Un angle plat mesure $\pi rd; 180^\circ$ et 200 grade
- Si x, y et z sont respectivement les mesures en radian, en degré et en grade d'un angle géométrique alors : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$.

II Abscisses curvilignes - Abscisse curviligne principale

Définition

- Lorsque le zéro de la droite des réels coïncide avec le point I sur le cercle trigonométrique.
- On enroule la demi-droite des réels positifs sur le cercle trigonométrique dans le sens positif et la demi - droite des réels négatifs dans le sens négatif.
- Chaque point M du cercle va coïncider avec une infinité de nombres réels tous appelés abscisses curvilignes du point M



Remarque

Le périmètre du cercle trigonométrique est égal à $2\pi \times 1 = 2\pi$

Propriété

- Si x et x' sont deux abscisses curvilignes d'un même point M du cercle trigonométrique Alors $x' = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Il existe une seule abscisse curviligne de M appartient à]- π, π], s'appelle abscisse curviligne principale du point M

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Angles orientés

https://steinmath.com

https://steinmath.com

ay better than yesterday, tomorrow better than today

IV Les lignes trigonométriques

1 Lignes trigonométriques

Définition

- Soit M un point du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ d'abscisse curviligne x et (D) la droite gente a $(\mathscr{C})$ en I
- Le couple de coordonnées du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $(\cos x, \sin x)$.
- Si $M \neq J$ et $M' \neq J'$ L'intersection de la droite (OM) et (D) est le point T dont l'abscisse dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est $\tan x$.

Propriété

Soit M un point du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$, d'abscisse curviligne x. Ona :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (propriété fondamentale)
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in Z$.

2 Lignes trigonométriques usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

V Relation entre les lignes trigonométriques

1 Angles opposés

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan x$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

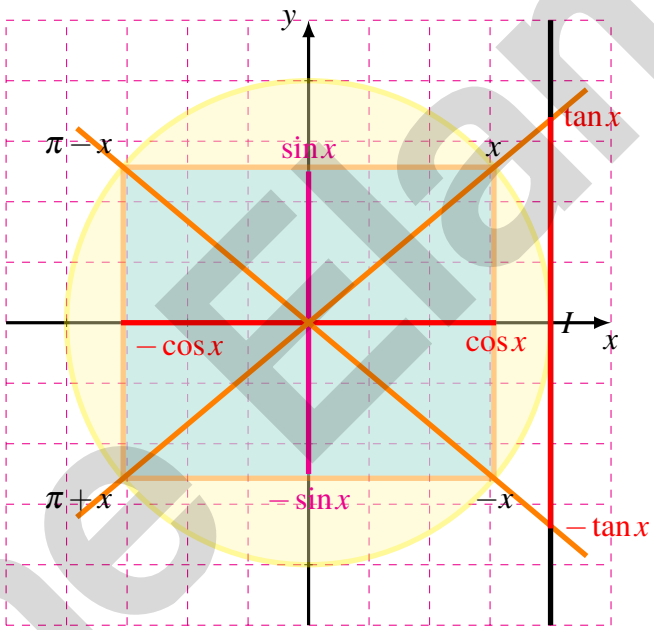
• Exemple

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2 Angles supplémentaires et opposés supplémentaires propriété :

Propriété

pour $\cos(\pi-x)=-\cos x$
· $\sin(\pi-x)=\sin x$
· $\tan(\pi-x)=-\tan x$
· $\cos(\pi+x)=-\cos x$
$\sin(\pi+x)=-\sin x$
$\tan(\pi+x)=\tan x$



• Exemple

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Angles complémentaires et opposés complémentaires

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

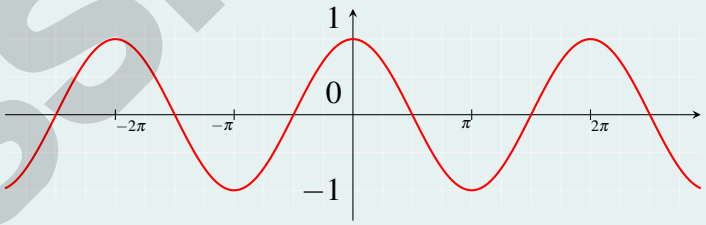
• Exemple

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

VI La fonction cosinus

Définition

La fonction qui a tout nombre réel x, assoie le nombre réel $\cos x$ est appelée fonction cosinus et notée cos. A l'aide du logiciel geogebra on a construit sa courbe ci-contre.



Propriété

La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

- On a pour tout x de $\mathbb{R}; \cos(x + 2\pi) = \cos x$ donc la fonction cos et périodique de période 2π.
- On a pour tout x de $\mathbb{R}; \cos(-x) = \cos x$; donc la fonction cos est paire.

le tableau de variation de la fonction cos sur $[-\pi, \pi]$:

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

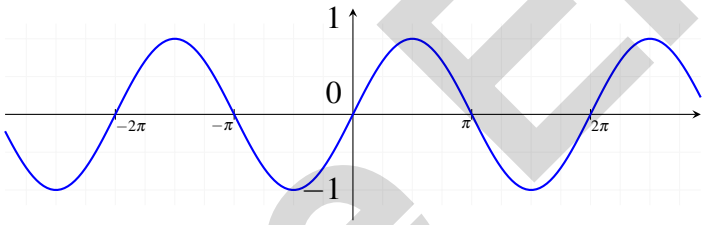
x	$-\pi$		0		π
$\cos x$	-1	↗	1	↘	1

VII La fonction sinus.

Définition

La fonction qui a tout nombre réel x, associe le nombre réel $\sin x$ est appelée la fonction sinus et notée sin.

A l'aide du logiciel geogebra on a construit sa courbe ci-contre.



Propriété

La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$.

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$ $\sin(x+2\pi) = \sin x$ donc la fonction sin est périodique de période 2π
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$ donc la fonction sin est impaire.

Le tableau de variation de la fonction $\sin$ sur $[-\pi, \pi]$

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

VIII Les équations trigonométriques fondamentales

Propriété

Si $|a| > 1$ alors les équations trigonométriques $\cos x = a$ et $\sin x = a$ non pas de solutions.

- $\cos x = \cos\alpha$ équivaut à $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = \sin\alpha$ équivaut à $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = \tan\alpha$ équivaut à $x = \alpha + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Cas particuliers :

- $\cos x = -1$ équivautà $x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1$ équivaut à $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = -1$ équivaut à $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1$ équivaut à $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• Exemple

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  On a : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$
  donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$
  D'où l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right)$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  On a : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$
  donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$
  donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
  D'où l'ensemble des solutions $\mathbb{R}$ est

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right)$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan x = \sqrt{3}$

  La fonction tan est définie siet seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in Z$
  On a : $\tan x = \sqrt{3}$ équivaut à $\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$
  donc $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ D'où l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right)$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

- $\cos x \geq \cos\alpha$ si et seulement si : $-\alpha+2k\pi \leq x \leq \alpha+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x > \cos\alpha$ et seulement si : $-\alpha+2k\pi < x < \alpha+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x \leq \cos\alpha$ si et seulement si : $x \in]-\pi+2k\pi, -\alpha+2k\pi] \cup [\alpha+2k\pi, \pi+2k\pi[/k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x < \cos\alpha$ si et seulement si : $x \in]-\pi+2k\pi, -\alpha+2k\pi[\cup]\alpha+2k\pi, \pi+2k\pi[/k \in \mathbb{Z}$

Propriété

- $\sin x \geq \sin\alpha$ si et seulement si : $\alpha+2k\pi \leq x \leq \pi-\alpha+2k\pi/k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x > \sin\alpha$ et seulement si : $\alpha+2k\pi < x < \pi-\alpha+2k\pi/k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x \leq \sin\alpha$ si et seulement si : $x \in [-\pi+2k\pi, \alpha+2k\pi] \cup [\pi-\alpha+2k\pi, \pi]/k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x < \sin\alpha$ si et seulement

$$ix \in [-\pi+2k\pi, \alpha+2k\pi[\cup]\pi-\alpha+2k\pi, \pi+2k\pi]/k \in \mathbb{Z}$$

Propriété

- $\tan x \geq \tan\alpha$ si et seulement si $\alpha+k\pi \leq x < \frac{\pi}{2}+k\pi/k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x > \tan\alpha$ si et seulement si $\alpha+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi/k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x \leq \tan\alpha$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x \leq \alpha+k\pi/k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x < \tan\alpha$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \alpha+k\pi/k \in \mathbb{Z}$

• Exemple

- Résoudre dans $[0,2\pi]$ l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

  On a $\cos x \geq \frac{1}{2}$ si et seulement si $\cos x \geq \cos\frac{\pi}{3}$

  d'après la figure ci - contre, la partie sur $[0,2\pi]$ telle que $\cos x \geq \frac{1}{2}$ est la partie coloriée en bleu c'est à dire $\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

  donc $S = \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

- Résoudre sur $[0,\pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

  On a : $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $\sin x \leq \sin\frac{\pi}{4}$

  D'après la figure ci - contre, la partie sur $[0,\pi]$ telle que $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ est la partie colorie en bleu c'est à dire $\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

  Donc $S = \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Yassine Ilami

Today better than yesterday, tomorrow better than today