Calcul littéral

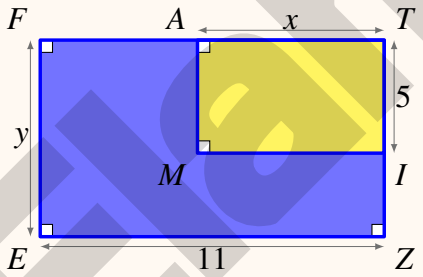
I Expression littérale et réduction

1 Définition

Activité

Expliquer ce que représente chacune des expressions suivantes, pour la figure ci-contre :

- ★ $5+x+5+x$
- ★ $11y$
- ★ $5x$
- ★ $2(5+x)$
- ★ $11y-5x$
- ★ $y+11+(y-5)+x+5+(11-x)$



Définition

Une expression littérale est une expression mathématique dans laquelle figurent des nombres et des lettres

Exemple

On considère les expression littérales suivantes :

★ $A=2x^3+5x^2-\frac{1}{2}x+11$

★ $B=2x\left(3x^2+2x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}x(5x-1)$

Remarque

Les nombres $2x^3$, $5x^2$, $\frac{1}{2}x$ et 11 s'appelent les termes de l'expression A

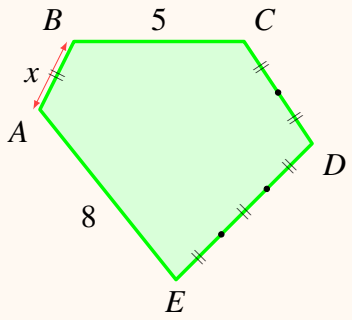
2 Réduction d'une expression littérale

Activité

Considérons le terrain ayant la forme d'un polygone (voir la figure)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than https://steinmath.com



1. Exprimer en fonction de x les distances CD et DE
2. Vérifier que le périmètre du terrain est : $L = 13 + x + 2x + 3x$ (c'est une expression littérale)
3. Montrer que : $L = 6x + 13$ (L'expression réduite de l)
4. Déterminer la distance AB sachant que $L = 25m$

Définition

Réduire une expression littérale, c'est la simplifier en regroupant les termes qui se ressemblent, du plus grand au plu petit exposant

EXEMPLES

Réduisons les expressions suivantes :

★ $A = 3x^2 - 2x + 4 - 5x^2 + 11x^3 + 1 + 7x + x^3$
$= 11x^3 + x^3 + 3x^2 - 5x^2 - 2x + 7x + 4 + 1$
$= 12x^3 - 2x^2 + 5x + 5$

★ $B = 3x - 2x^5 + 2x^3 + x^5 - 11 - 5x^3 + 7x^5 + 6 - 10x$
$= -2x^5 + x^5 + 7x^5 + 2x^3 - 5x^3 + 3x - 10x - 11 + 6$
$= 6x^5 - 3x^3 - 7x - 5$

II Développement et réduction d'une expression littérale

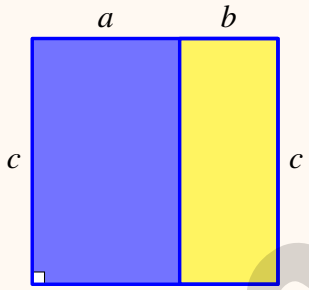
1 Développement d'une expression littérale

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Activité

On considère la figure ci-contre qui représente un carrée



1. Écrire sous forme d'un produit l'aire de ce carrée (produit des longueurs des cotés)
2. Écrire sous forme d'une somme cette aire (la somme des aires des deux rectangles)
3. Déduire que $c(a+b)=ca+cb$

Définition

Développer c'est transformer un produit en une somme ou (et) une différence
Autrement dit : Si a, b,c,d et k sont des nombres rationnels

$$\text{Développement} \longrightarrow$$

$$k\times(a+b)=k\times a+k\times b$$
$$k\times(a-b)=k\times a-k\times b$$
$$(a+b)(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

Exemples

Développer les expressions suivantes

★ $A = 2x\times(3x-5)$
$= 2x\times 3x-2x\times 5$
$= 6x^2-10x$

★ $B = -3x\times\left(2x^2-4x-1\right)$
$= -3x\times 2x^2-(-3x)\times 4x-(-3x)\times 1$
$= -6x^2+12x^2+3x$

★ $C = \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\times\left(-4x+\frac{5}{2}\right)$
$= \frac{1}{2}x\times(-4x)+\frac{1}{2}x\times\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\times(-4x)-\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$
$= -2x^2+\frac{5}{4}x+3x-\frac{15}{8}$
$= -2x^2+\frac{17}{4}x-\frac{15}{8}$

Application

Développer et réduire si possible les expressions littérales suivantes

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1 $A = -3x(-2+4x)$

2 $B = \frac{1}{2}x(6x-4)$

3 $C = -2x\left(2x^2-x+4\right)-3x(5+x)$

4 $D = \left(3x-\frac{1}{2}\right)(2x+4)$

5 $E = -2x(-3x+5)(-5x-7)$

Solution

1 $A = -3x(-2+4x) = 6x-12x^2$

2 $B = \frac{1}{2}x(6x-4) = \frac{6}{2}x^2-\frac{4}{2}x = 3x^2-2x$

3 $C = -2x\left(2x^2-x+4\right)-3x(5+x) = -4x^3+2x^2-8x-15x-3x^2 = -4x^3-x^2-23x$

4 $D = \left(3x-\frac{1}{2}\right)(2x+4) = 6x^2+12x-\frac{2}{2}x-\frac{4}{2} = 6x^2+12x-x-2 = 6x^2+11x-2$

5 $E = -2x(-3x+5)(-5x-7) = \left(6x^2-10x\right)(-5x-7) = -30x^3-42x^2+50x^2-70x$
$= -30x^3+8x^2-70x$

2 Développement et identités remarquables

Activité

1 Écrire sous forme d'un produit puis sous forme d'une somme l'aire :

a d'un carrée de coté $a+b$

b d'un carrée de coté $a-b$

c d'un rectangle de dimensions $a+b$ et $a-b$

2 Prouver que : $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(bc-ad)^2$
Utiliser ce résultat pour calculer 13×41 en l'écrivant sous forme d'une somme de deux carrée d'entiers

Propriété

Soient a, b et c trois nombres rationnels

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

EXEMPLES

✪ $A = \left(2x+\frac{1}{3}\right)^2$
$= (2x)^2 + 2\times 2x\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$= 4x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$

✪ $B = \left(\frac{3}{2}x-2\right)^2$
$= \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2\times\frac{3}{2}x\times 2 + 2^2$
$= \frac{9}{4}x^2 - 6x + 4$

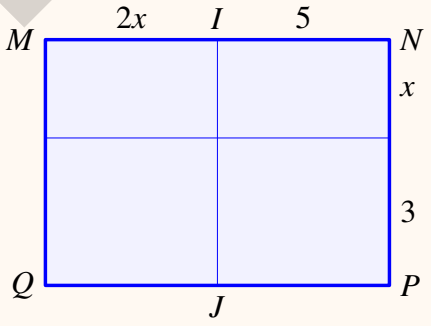
✪ $C = \left(2x+\frac{5}{3}\right)\left(2x-\frac{5}{3}\right)$
$= (2x)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2$
$= 4x^2 - \frac{25}{9}$

III Factorisation d'une expression littérale

Activité

On considère les deux expression : $E = (2x+5)(x+3) - 5(x+3)$ et $F = 2x^2 + 6x$, et on considère la figure ci-contre qui représente des rectangles (avec $x \geqslant 0$)

1. Calculer en fonction de x l'aire des rectangles $MNPQ$ et $INPJ$
2. En déduire que $E = F$
3. Écrire $ab+ac$ sous forme d'un produit en dessinant un rectangle de dimensions a et $b+c$



Définition

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit
Autrment dit : Si a, b et k sont des nombres rationnels

$$\text{Factorisation} \longrightarrow$$
$$k\times a + k\times b = k\times(a+b)$$
$$k\times a - k\times b = k\times(a-b)$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1 Factorisation et facteur commun

EXEMPLES

Factorisons les expressions suivantes (On va chercher un facteur commun)

✪ $A = 5x^2+3x$
$= x\times 5x+x\times 3$
$= x(5x+3)$

✪ $B = 6x^4-2x^3+8x^2$
$= 2x^2\times 3x^2-2x^2\times x+2x^2\times 4$
$= 2x^2\times\left(3x^2-x+4\right)$

✪ $C = 3x(x+1)-5(x+1)$
$= (x+1)(3x-5)^2$

✪ $D = (2x+5)^2+7(2x+5)-(2x+5)$
$= (2x+5)[(2x+5)+7x-1]$
$= (2x+5)(2x+5+7x-1)$
$= (2x+5)(9x+4)$

2 factorisation et identités remarquables

Propriété

Soient a et b deux nombres rationnels

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

EXEMPLES

Factorisons les expressions suivantes

✪ $A = 25x^2+20x+4$
$= (5x)^2+2\times 5x\times 2+2^2$
$= (5x+2)^2$

✪ $B = 49x^2-42x+9$
$= (7x)^2-2\times 7x\times 3+3^2+$
$= (7x-3)^2$

✪ $C = 9x^2-16$
$= (3x)^2-4^2$
$= (3x-4)(3x+4)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today