Puissance d'un nombre relatif

Activité

1. Observer le produit suivant : $3 \times 3 \times 3$
   Combien y-a-t'il de facteurs dans ce produit ?
   Comment sont-ils ces facteurs ?
   Complète : $3 \times 3 \times 3$ est le produit de ..... facteurs égaux à .....
2. Dans le produit $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
   Combien y-a-t'il de facteurs dans ce produit ?
   Comment sont-ils ces facteurs ?
   Complète : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ est le produit de ..... facteurs égaux à .....
3. Écris le produit de 100 facteurs égaux à 3
   Quel est l'obstacle que tu as trouvé dans cette écriture ?
   Pour passer de cet obstacle on écrit ce produit saou la forme 3^{100}
   3^{100} est la puissance du nombre 3 et se lit 3 à la puissance 100
4. Écrit le produit de 25 facteurs égaux à 3
5. En utilisant l'écriture précédente sous forme d'une puissance, écrit le produit de 15 facteurs égaux à (-2)

Activité

On considère le tableau suivant :

1 : 2	2 : 4	3 : 8 .....
4 : 16	5 :	6 : ....
7 :	8 :	9 : ....

1. Compléter le tableau après avoir trouver la règle de remplissage des trois premier cases
2. Écrire chaque nombre à l'aide du nombre qui le précède
3. Si le nombre 8 s'écrit sous la forme 2^3, alors comment peut-on exprimer les autres nombres de la mêm façon ?
4. Dans l'écriture 2^3, le nombre 3 s'appelle l'exposant de la puissance (2^3)
   Quelle est la puissance du nombre 2 dans le nombre situé dans la case 7
5. Remplir à nouveau le tableau en utilisant cette fois les puissances du nombre (-2)

Yassine Elamri

I Puissance d'un nombre relatif

On considère le produit suivant : $A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
Ce produit comporte 5 facteurs égaux à 2
On appelle ce produit la cinquième puissance du nombre 2, et on écrit : 2^5
Le nombre 2^5 se lit : 2 à la puissance 5, ou encore 2 exposant 5

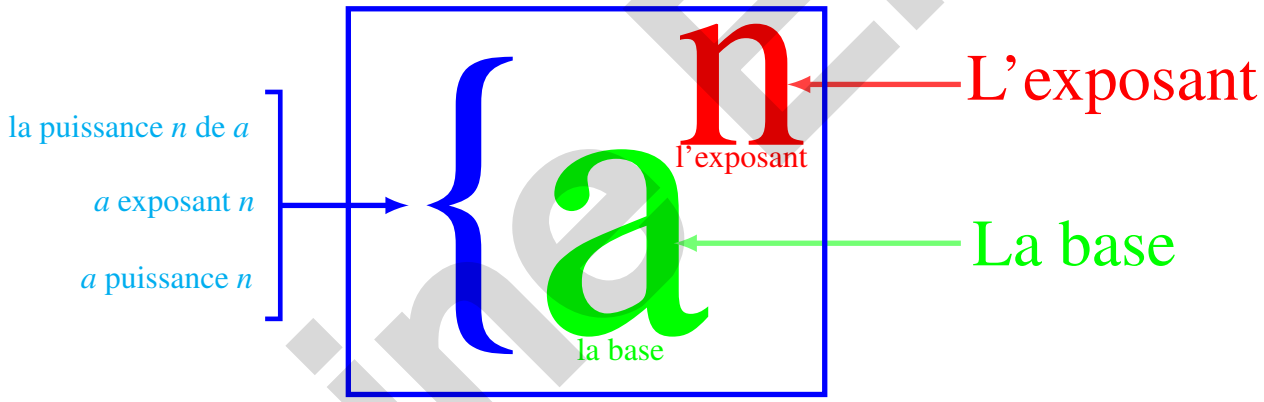
Définition

Soit a un nombre décimal relatif non nul et n un nombre entier positif supérieur à 1

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots\cdots\cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

De plus : $a^1 = a$ et pour $a \neq 0$ on a : $a^0 = 1$

✸ ***L'écriture a^n :***



✸ ***Vocabulaire***

Si a est un nombre relatif non nul, alors :
☆ a^n se lit " a à la puissance n " ou encore " a exposant n "
☆ Le nombre n est appelé " exposant "
☆ a^2 se lit : a exposant 2, ou a puissance 2, ou a au carrée
☆ a^3 se lit : a exposant 3, ou a puissance 3, ou a au cube

Remarque

La puissance 0^0 n'existe pas

EXEMPLES

- $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
- $-3^2 = -3 \times 3 = -9$
- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
- $-4^3 = -4 \times 4 \times 4 \times 4 = -64$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

⚠ En l'absence de parenthèses, les puissance ont priorité sur les multiplications et les divisions

Application

Calculer les puissance suivantes

★ 2^3 ★ 1^{12} ★ $(-1)^4$

★ $(-544)^0$ ★ 0^{45} ★ $(4)^0$

Solution

★ $2^3 = 8$ ★ $1^{12} = 1$ ★ $(-1)^4 = 1$

★ $(-544)^0 = 1$ ★ $0^{45} = 0$ ★ $(4)^0 = 1$

II Signe d'une puissance

Activité

1 Recopier et compléter le tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6
$(0.1)^n$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$(-1)^n$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$(-2)^n$	.....	.....	.....	.....	.....	.....

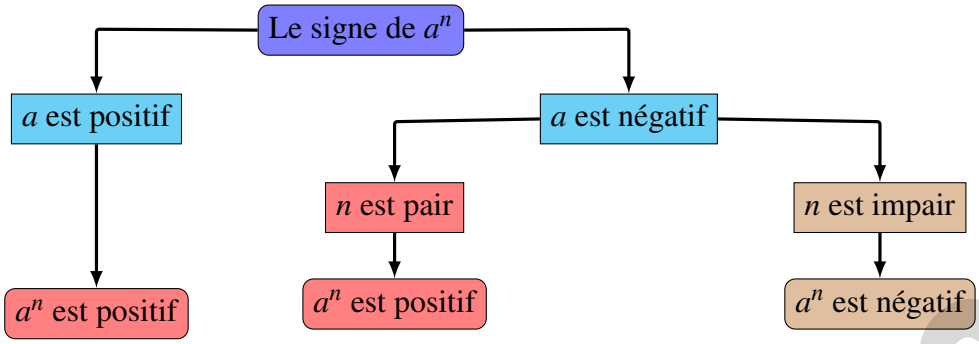
2 En déduire les conditions pour que a^n soit négative, a étant un nombre relatif et n un nombre entier naturel

Règle

Une puissance est négative si sa base est négative et son exposant est impair
Et elle positive dans les autres cas

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



EXEMPLES

★ La puissance $(-11)^4$ est positif car la base -11 est négatif est l'exposant 4 est positif

★ La puissance $(-7)^5$ est négatif car la base -7 est négatif et l'exposant 5 est impair

★ La puissance 7^{33} est positif car la base 7 est positif

★ 5^2 est positif car la base 5 est positif

⚠ ★ Si a est un nombre décimal et n un nombre entier naturel pair
Alors $(-a)^n = a^n$

Application

Déterminer le signe des puissances suivantes :

$$(-3)^2 \quad ;; \quad (-2)^{15} \quad ;; \quad 5^3 \quad ;; \quad (-7)^{15}$$

Solution

$(-3)^2$: Positif ;; $(-2)^{15}$: Négatif ;; 5^3: Positif ;; $(-7)^{15}$: Négatif

III Opérations sur les puissances

1 Produit de deux puissances de même base

Activité

Observer l'exemple suivant et compléter :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$2^4 \times 2^3 = \left(\underbrace{2\times2\times2\times2}_{4 \text{ facteurs}}\right) \times \left(\underbrace{2\times2\times2}_{3 \text{ facteurs}}\right) = \left(\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{4+3 \text{ facteurs}}\right) = 2^7$

$3^4 \times 3^5 = \left(\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\cdots \text{ facteurs}}\right) \times \left(\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\cdots \text{ facteurs}}\right) = \left(\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\cdots+\cdots \text{ facteurs}}\right) = \cdots$

$3^4 \times 3^5 = \left(\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\cdots \text{ facteurs}}\right) \times \left(\underbrace{\cdots\cdots\cdots a^m}_{\cdots \text{ facteurs}}\right) \times a^n = \left(\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\cdots+\cdots \text{ facteurs}}\right) = \cdots$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul, et m et n deux nombres entiers relatifs, alors

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

EXEMPLES

- $5^5 \times 5^8 = 7^{5+8} = 7^{13}$
- $12^3 \times 12^5 = 12^{3+5} = 12^8$
- $(-21)^2 \times (-21)^7 = (-21)^{2+7} = (-21)^9$
- $(-12)^4 \times (-12)^{15} = (-12)^{4+15} = (-12)^{19}$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = 2^4 \times 2^6$
- $B = (-4.5)^4 \times (-4.5)^3 v (-4.5)^2$
- $C = (-4)^7 \times (-4)^4$
- $D = 9^3 \times 9^2 \times 9$

Solution

- $A = 2^{10}$
- $B = 9^6$
- $C = (-4)^{11}$
- $D = (-4.5)^9$

2 Produit de deux puissances de même exposant

Activité

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs tel que : $a = 2$ et $b = 3$

Compléter le tableau suivant :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

n▼	a^n	b^n	$a^n \times b^n$	$a \times b$	$(a \times b)^n$
2	.....	.....	.....	.....	.....
3	.....	.....	.....	.....	.....
-2	.....	.....	.....	.....	.....

Que remarquez-vous ?

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs non nul, et n un nombre entier relatif
Alors

$$a^n \times b^n = a \times b^n$$

EXEMPLES

- $5^5 \times 6^5 = (5 \times 6)^5 = 30^5$
- $2^3 \times 10^3 = (2 \times 10)^3 = 20^3$
- $(-3)^2 \times (-2)^2 = ((-3) \times (-2))^2 = 6^2$
- $(-12)^4 \times (-2)^4 = ((-12) \times 2)^4 = (-24)^4$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = 2^3 \times 6^3$
- $B = (-4)^2 \times (-5)^2$
- $C = (11)^7 \times (12)^7$
- $D = 9^3 \times (-3)^3$

Solution

- $A = 12^3$
- $B = 20^2$
- $C = 132^7$
- $D = (-27)^3$

3 Quotient de deux puissances de même base

Activité

Observer l'exemple suivant et compléter :

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 \times 2 = 2^2$$

$$\frac{3^4}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{10^5}{10^3} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul, et m et n deux nombres entiers positifs avec $m > n$, alors

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

EXEMPLES

- $\frac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$
- $\frac{3^{11}}{3^2} = 3^{11-2} = 3^9$
- $\frac{(-4)^7}{(-4)^3} = (-4)^{7-3} = (-4)^4$
- $\frac{(-1)^5}{(-1)^3} = (-1)^{5-3} = (-1)^2$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = \frac{4^7}{4^3}$
- $B = \frac{6^6}{6^2}$
- $C = \frac{(-3)^{13}}{(-3)^7}$
- $D = \frac{(-7)^7}{(-7)^6}$

Solution

- $A = 4^4$
- $B = 6^4$
- $C = (-3)^6$
- $D = (-7)^1$

4 Quotient de deux puissances de même exposant

Activité

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs tel que : $a = 8$ et $b = 2$
Compléter le tableau suivant :

n ▼	a^n	b^n	$\frac{a^n}{b^n}$	$\frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n$
2	.....	.....	.....	.....	.....
3	.....	.....	.....	.....	.....
-2	.....	.....	.....	.....	.....

Que remarquez-vous ?

Règle

Soient a et b deux nombres décimaux relatifs non nul, et n un nombre entier relatif
Alors

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

EXEMPLES

- $\frac{3^7}{19^7} = \left(\frac{3}{19}\right)^7$
- $\frac{3^{11}}{9^{11}} = \left(\frac{3}{9}\right)^{11} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$
- $\frac{(-4)^5}{2^5} = \left(\frac{-4}{2}\right)^5 = (-2)^5$
- $\frac{6^3}{(-3)^3} = \left(\frac{6}{-3}\right)^3 = (-2)^3$

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = \frac{5^7}{4^7}$
- $B = \frac{11^{17}}{121^{17}}$
- $C = \frac{(-3)^4}{(-5)^4}$
- $D = \frac{(-2)^3}{(5)^3}$

Solution

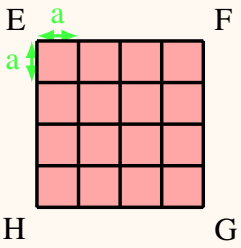
- $A = \left(\frac{5}{4}\right)^7$
- $B = \left(\frac{1}{11}\right)^{17}$
- $C = \left(\frac{3}{5}\right)^4$
- $D = \left(\frac{-2}{5}\right)^3$

5 Puissance d'une puissance

Activité

❶ Si 3^2 et 3^3 sont les dimensions d'un rectangle
Exprimer l'aire de ce rectangle sous forme d'une puissance de 3

❷ ➥ Calculer l'aire du carré $EFGH$, ci-contre, de deux façons
➥ En déduire que : $(4a)^2 = 4^2 \times a^2$



❸ ➥ Montrer que : $(2^2)^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
➥ En déduire que : $(2^2)^3 = 2^6$

Règle

Soit a un nombre décimal relatif non nul et m et n deux nombres entiers positifs, alors :

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

EXEMPLES

- $\left[(-3)^5\right]^3 = (-3)^{5\times 3} = (-3)^{15}$
- $(5^6)^2 = 5^{6\times 2} = 5^{12}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Écrire sous forme d'une puissance :

- $A = (2^4)^3$
- $B = (3^5)^2$
- $C = \left[(-2)^3\right]^6$
- $D = \left[(-6)^2\right]^4 \times \left[(0.5)^4\right]^2$

Solution

- $A = 2^{12}$
- $B = 3^{10}$
- $C = (-2)^{18}$
- $D = (-3)^8$

IV Puissance de 10

Règle

Soit n un nombre entier naturel non nul

$$10^n = 1\underbrace{000\ldots\ldots0}_{n \text{ zéros}}$$

EXEMPLES

- $10^3 = 1000$
- $10^7 = 10000000$
- $10^2 = 100$
- $10^5 = 100000$

Application

Écrire en utilisant les puissance de 10

- $A = 10000$
- $B = 100$
- $C = (70+30) \times 100000$
- $D = (250 \times 40) \times 10000$

Solution

- $A = 10^4$
- $B = 10^2$
- $C = 10^7$
- $D = 10^8$

V La notation (Écriture) scientifique d'un nombre décimal

Activité

Calculer le produit 45000×1500000 au moyen d'une calculatrice puis sans calculatrice

Que signifie l'écriture $\boxed{6,75E10}$ ou l'écriture $\boxed{6,75 \times 10^{10}}$ affiché par la calculatrice ?

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Définition

Soit b un nombre décimal tel que $b = a \times 10^n$ ou $1 \leqslant a < 10$ et n un nombre entier relatif
$a \times 10^n$ est la notation scientifique , ou l'écriture scientifique de b

EXEMPLES

- $912000 = 9.12 \times 10^5$ est la notation scientifique de 912000
- $0.0235 = 2.35 \times 10^{-2}$ est la notation scientifique de 0.0235

Application

Donner la notation scientifique des nombres suivant :

- $A = 5 \times 10^3 - 2 \times 10^2$
- $B = 64.5 \times 10^8 + 631 \times 10^7$
- $C = 300\,000\,000$
- $D = 602\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

Solution

- $A = 4.8 \times 10^3$
- $B = 1.276 \times 10^{10}$
- $C = 3 \times 10^8$ (En m/s c'est la vitesse de la lumière)
- $D = 6.02 \times 10^{23}$ (C'est le nombre d'atome dans un gramme d'Hydrogène)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today