Chapitre

Limites

I Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point :

1 Limite finie d'une fonction en un point :

Définition

Soit f une fonction numérique, a et l deux nombres réels telle que f définie sur l'intervalle $]a-\alpha;a+\alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ ou sur un ensembles de la forme $]a-\alpha;a+\alpha[\setminus\{a\}$
Si $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, alors on écrit : $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Propriété

Si f admet une limite l en a alors cette limite est unique.

Propriété

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$, les fonctions
$x \mapsto x^2; x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^n$; $x \mapsto k|x|; x \mapsto k\sqrt{|x|}; x \mapsto k|x|^n$ Tendent vers 0 quand x tend vers 0 .

• Exemple

Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to 0} x^8$
2) $\lim\limits_{x\to 0} 5|x|$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}|x|^3$

Solutions: 1) $\lim\limits_{x\to 0} x^8 = 0$
2) $\lim\limits_{x\to 0} 5|x| = 0$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}|x|^3 = 0$

Propriété

Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x)-l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Remarque

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; on remplace x par a :
* Si $f(a) \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
* Si $f(a) =$ " $\frac{0}{0}$ " , il faut chercher des méthodes (factorisation par $(x-a)$; multiplier par le conjugué.....) pour éliminer $\frac{"0"}{0}$.
* Les formes indéterminées : " $\frac{0}{0}$ " ; " $\frac{\infty}{\infty}$ " ; " $0*\infty$ " ; " $+\infty-\infty$ "

Yassine Elamri

a Limite à gauche et limite à droite d'une fonction en un point :

Définition

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel.

* Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a à droite alors on écrit $\lim\limits_{xax>a\to f}(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$.

* Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a à gauche alors on écrit $\lim\limits_{xax<a\to f}(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$.

Remarque

On peut définir d'une manière analogue $\lim\limits_{xax>a\to f}(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{xax<a\to f}(x)=\pm\infty$

b Limites usuelles :

Propriété

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$\otimes\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$; $\otimes\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$; $\otimes\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$; $\otimes\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$

- Si n est pair alors $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$

- Si n est impair alors $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^n}=-\infty$

Propriété

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel

- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$
- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$

Application

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3}{2-x}$; $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2+x-1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1-x}{4-2x}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Limite finie et infinies d'une fonction au voisinage de ∞

1 Limite finie d'une fonction au voisinage de ∞ :

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{R}$ on a : $\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{k}{x^n} = 0$; $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$; $\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$

Propriété

Soit f une fonction numérique et soit $l \in \mathbb{R}$ on a :

$\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - l) = 0$; $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - l) = 0$

2 Limite infinie d'une fonction au voisinage de ∞ :

Définition

Soit f une fonction numérique définie dans un voisinage de $+\infty$.
* Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty\to f} = +\infty$ et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
* Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty\to f} = -\infty$ et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $+\infty$ est $-\infty$.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{R}$ on a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$ $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$ $\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} kx^n = \begin{cases} +\infty; \text{ si } k > 0 \\ -\infty; \text{ si } k < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} kx^{2n} = \begin{cases} +\infty; \text{ si } k > 0 \\ -\infty; \text{ si } k < 0 \end{cases}$
- $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} kx^{2n+1} = \begin{cases} +\infty; \text{ si } k < 0 \\ -\infty; \text{ si } k > 0 \end{cases}$

• Exemple

$\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty; \otimes \lim\limits_{x\to+\infty} x^{11} = +\infty$ $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (car 2 est pair) $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} x^{23} = -\infty$ (23 est impair) $\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^6 = -\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^{15} = -\infty$; $\otimes \lim\limits_{x\to-\infty} -$

Yassine Elami

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$2x^{35} = +\infty$

III Opérations sur les limites :

Dans cette paragraphe l et l' désignent des nombres réels et a désigne un réel ou $\pm\infty$

1 Limite d'une somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$-\infty$

2 Limite d'un produit :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

3 Limite d'un quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$F.I$	FI	FI

IV Applications

1 Limite d'une fonction polynôme :

Propriété

Soit f une fonction polynôme et a un nombre réel.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- La limite d'une fonction polynôme au voisinage de ∞ c'est la limite du terme le plus dominant (plus haut degré).

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

1 $\lim\limits_{x\to 3} 4x^2+2x-5 = 4\times 3^2+2\times 3-5 = 37$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\sqrt{2})x^3+2x^2-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\sqrt{2})x^3 = -\infty$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2+3x-4 = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$

Application

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 0} x^2+\dfrac{1}{x^2}$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x$

3 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+4}{x}$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^4+x+1}{2x^2-5}$

5 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{x+2}{2x-3}$

6 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(x+1)+1}{x+1}$

2 Limite d'une fonction rationnelle :

Définition

Soit f une fonction rationnelle et a un nombre réel.

- Si $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$

- La limite d'une fonction rationnelle au voisinage de ∞ c'est la limite du quotient de termes les plus dominant (plus haut degré au numérateur et plus haut degré au dénominateur).

Application

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4+2x^2}{3x^3+5x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{3}x^2-4x+1}{2x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2x^2+3x-5}{2x+4}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Limite d'une fonction de la forme $\sqrt{f}$:

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle de forme $[a;+\infty[(a \in \mathbb{R})$ telle que :
$\forall x \in [a;+\infty[; f(x) \geq 0$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim \sqrt{x}+\infty = +\infty$

Remarque

La propriété précédente est reste valable pour x tend vers $-\infty$ ou a ou a^+ ou a^-

V Limites et ordre :

Propriété

Soient f, g et h définies sur un intervalle de forme $]a-\alpha;a+\alpha[$ ou $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $l \in \mathbb{R}$

Si $\begin{cases} (\forall x \in I); f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Si $\begin{cases} (\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \\ \lim_x a g(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Si $\begin{cases} (\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Si $\begin{cases} (\forall x \in I); |f(x)-l| \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Remarque

Les propriétés sont valables pour x tend vers $\pm\infty$ ou x tend vers à droite ou à gauche de a

• Exemple

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \cos(x)$.

On a $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow -1+x^2 \leq x^2+\cos(x) \leq 1+x^2$ Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 - 1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\cos(x) = +\infty$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today