Chapitre

Limites des fonctions

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
* On approchera la notion de limite d'une manière intuitive à partir du " comportement " des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ et leur inverse au voisinage de 0 et de $+\infty$ et de $-\infty$ et on admettra ces limites ; * On se basera sur les propriétés de l'ordre dans $\mathbb{R}$ pour calculer les limites de fonctions simples * On habituera les élèves à lever les indéterminations ; * On se limitera, dans lutilisation de la définition de la limite, à démontrer quelques propriétés signalées au programme et dans la résolution de quelques exercices pour se familiariser tout simplement avec la définition.	* Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ; * Calculer les limites de fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles ; * Résoudre des inéquations de type $\lvert f(x)-\ell\rvert < \varepsilon$ et de type $f(x) > A$ pour montrer que $f(x)$ tend vers ℓ dans des situations simples.

Yassine Elamri

I Limite lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$

1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

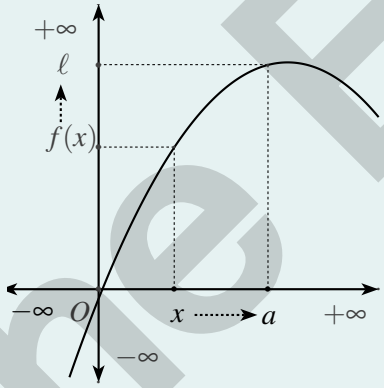
Définition

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez proche du réel a. Précisément

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Ou : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ ,\ \left|x-a\right| < \delta \Longrightarrow \left|f(x)-\varepsilon\right| < \ell.$



2 Cas où la limite est $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche du réel a. Précisément :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

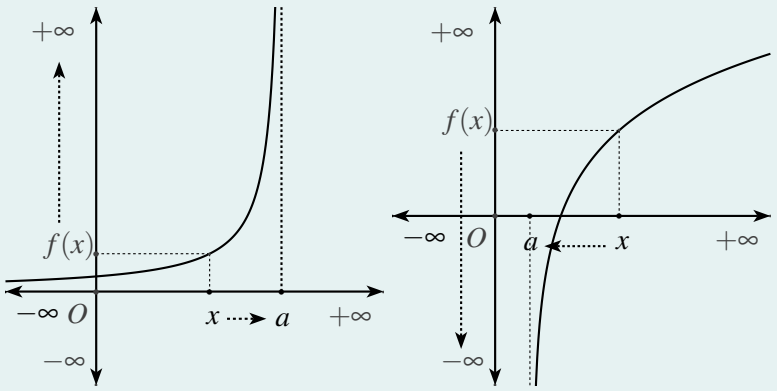
pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

Ou : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0\ ,\ \left|x-a\right| < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0\ ,\ \left|x-a\right| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A.$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



Interprétation géométrique : Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = a$ comme *asymptote verticale*.

3 Limites à droite et à gauche

Définition

Les *limites à droite* $\lim\limits_{x\to a^+} = \lim\limits_{x\to a, x>a}$ sont définies en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a, a+\delta[$.

Les *limites à gauche* $\lim\limits_{x\to a^-} = \lim\limits_{x\to a, x<a}$ sont définies en remplaçant $]a-\delta, a+\delta[$ par $]a-\delta, a[$.

L'interprétation en terme d'asymptote est identique.

II Limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

1 Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

Définition

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $\ell \in \mathbb{R}$ si le nombre $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut du réel ℓ, pourvu que x soit assez grand. Précisément

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Ou : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \mid x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.

Remarque

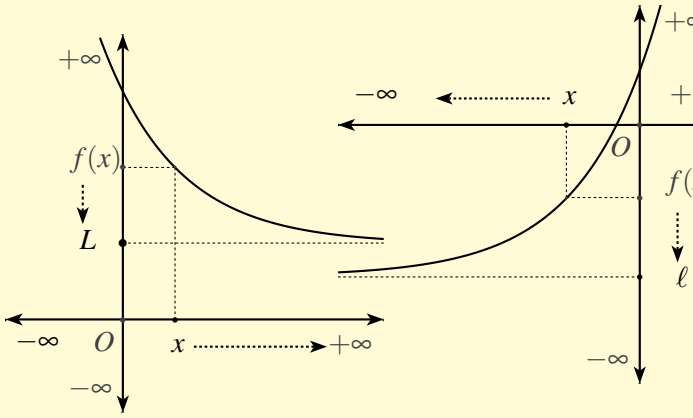
On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty}$ en remplaçant $]B, +\infty[$ par $]-\infty, -B[$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Interprétation géométrique.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.



On définit de façon analogue l'asymptote horizontale en $-\infty$.

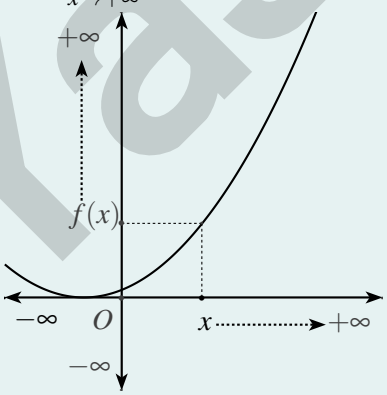
2 Cas d'une limite infinie

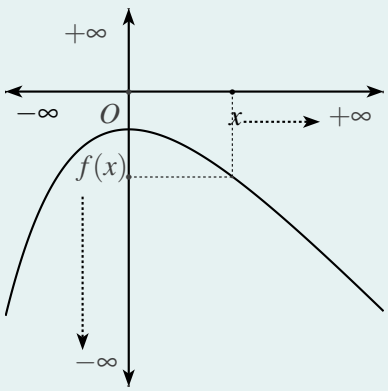
Définition

On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ (plus l'infini), est $+\infty$ si le nombre $f(x)$ peut être grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand. Précisément

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in]B, +\infty[$ on ait $f(x) \in]A, +\infty[$.

Ou : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \mid x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.





Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Définir avec précision :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow$ .....

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ .....

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$ .....

III Opérations sur les limites

Les résultats qui suivent sont valables pour $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)+v(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} u(x)\times v(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3 Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0^+ $(0,\, v(x)>0)$	0^- $(0,\, v(x)<0)$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{v(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Remarque

- Lorsque la forme indéterminée, $\left(\infty-\infty;\infty\times 0;\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}\right)$ il faut changer l'écriture de la fonction pour lever l'indétermination.
- Pour traiter les limites de quotients $\frac{u}{v}$ on remarque $\frac{u}{v}=u\times\frac{1}{v}$.
- Dans le cas de $\frac{1}{v(x)}$, si la limite de $v(x)$ est nulle, il faut étudier le signe de $v(x)$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

pour conclure.

▶ On n'écrit jamais de calcul faisant intervenir $+\infty$, $-\infty$, 0^+, 0^-,...

• Exemple

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$
- La limite $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x}$ dépend du signe de $2-x$ car $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$.

Or

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

donc si $x<2$, on a $2-x>0$, d'où $\lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$.

4 Limite de fonctions composées

Soient $a, b, \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} v(X) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = \ell$.

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

IV Traiter les formes indéterminées

Avant d'utiliser l'une des techniques suivantes, s'assurer d'avoir **simplifié** l'expression.

• Exemple

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} =$ .....

1 Formes indéterminées avec des polynômes

D'une manière générale, factoriser dans l'expression, ou au numérateur et au dénominateur, le terme qui semble devoir dominer :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

$\lim_{x\to+\infty} x^6 - x^4 + x^3 + 1 = \ldots$

$\lim_{x\to+\infty} 10\sqrt{x} - x + 2 = \ldots$

La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

EXEMPLES

Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc la limite du facteur entre parenthèses est 1.

Par produit on a bien : $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.

Exemple

$\lim_{x\to+\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 = \ldots$

Exemple

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ par théorème.

Exemple

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{x^2+x+1} \ldots$

La propriété du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.

L'utilisation de la propriété pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :

1. Application de la propriété 2. Simplification 3. Conclusion.

La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que la limite de son terme de plus haut degré. De même, la limite du quotient de deux polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est la même que

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

celle du quotient de leurs termes de plus haut degré.

EXEMPLES

Dans le cas d'un polynôme en $+\infty$: soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$P(x) = a_n x^n \times \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc la limite du facteur entre parenthèses est 1.

Par produit on a bien : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$.

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 + 3x^4 - 5x + 4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

• Exemple

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ par théorème.

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{x^2+x+1} \ldots\ldots\ldots\ldots$

La propriété du plus haut degré ne s'applique que pour les limites en $+\infty$ ou $-\infty$.

L'utilisation de la propriété pour les quotients de deux polynômes se fait en trois temps :

1. Application de la propriété 2. Simplification 3. Conclusion.

2 Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et changement de variable

Pour les limites en $a \in \mathbb{R}$ (ou a^+, a^-) qui présentent une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, il peut être opportun de faire un changement de variable en posant $x = a + h$.

• Exemple

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3 + x - 2}{1-x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Forme indéterminée et radicaux : quantité conjuguée

Pour les limites faisant intervenir des radicaux, on peut essayer de multiplier au numérateur et au dénominateur par *la quantité conjuguée* avec comme idée d'utiliser l'identité remarquable :
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

• Exemple

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=$ .....

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=$ .....

V Théorèmes d'encadrement

1 Théorème de majoration et de minoration

Soient u et f deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.

- si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ et pour tout $x\in[a,+\infty[$, $f(x)\geqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=-\infty$ et pour tout $x\in[a,+\infty[$, $f(x)\leqslant u(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Exemples

On prouve le premier point (la démo du second est analogue).

Par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ signifie que pour tout $A>0$, il existe $B>a$ tel que pour tout $x\in[B,+\infty[$, on ait $u(x)\in[A,+\infty[$.

Or pour tout $x\in[a,+\infty[$, $f(x)\geqslant u(x)$ donc en particulier, pour tout $x>B$, on a l'inégalité $f(x)\geqslant u(x)\geqslant A$, donc $f(x)\geqslant A$. On a prouvé :

Pour tout $A>0$, il existe $B>0$ tel que pour tout $x\in[B,+\infty[$, on ait $f(x)\in[A,+\infty[$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\cos(x)-2)=$ .....

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today