Chapitre

Rotation dans le plan

Cours 1BSX

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
► On définira une rotation à partir de son centre et de son angle ; ► L'introduction des coordonnées et de l'expression analytique d'une rotation est hors programme. ► ►	► Utiliser une rotation donnée dans une situation géométrique ; ► Construire les images de figures usuelles par une rotation donnée ; ► Reconnaitre une rotation et l'utiliser pour résoudre des problèmes géométriques (déterminer des lieux géométriques, construction géométriques ...) ; ► Reconnaitre des figures isométriques en utilisant une rotation.

Yassine Elamri

Avant propos

Une transformation géométrique est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire une manière d'associer à chaque point un autre point, de telle manière que tout point soit l'image d'un autre point, et que deux points différents aient des images différentes. Les transformations auxquelles on va s'intéresser conservent la plupart des propriétés géométriques intéressantes. Par exemple, toutes envoient une droite sur une droite, un cercle sur un cercle, un angle de 42° sur un angle de 42°, un carré sur un carré et ainsi de suite... Le fait de s'intéresser aux transformations qui préservent certaines propriétés est un élément essentiel de la géométrie "moderne" (c'est-à-dire celle pratiquée depuis le $XIXe$ siècle) que vous rencontrerez si vous continuez des études en mathématiques. Cependant, les transformations du plan sont aussi très utiles dans la résolution de problèmes de géométrie plus élémentaires. **Dans tout ce qui suit $(\mathscr{P})$ est le plan orienté positivement**

I Rappel

1 Activités de rappel

Activité

1

1 Construire un triangle ABC isocèle et rectangle au point A tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, puis déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$.

2 Construire un triangle EFG tel que $EF = EG$ et $\left(\overrightarrow{FG};\overrightarrow{FE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Activité

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et I le milieu du segment $[AD]$.

1 En utilisant la symétrie centrale S_O de centre O.

a Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)$.

b Montrer que $S_O(I)$ est le milieu du segment $[BC]$.

2 En utilisant juste le compas et la règle, construire les deux points E et F tels que : $\begin{cases} AC = AE \\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} AF = AE \\ \left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$. Puis vérifier que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Rotation - Rotation réciproque

1 Rotation

Activité

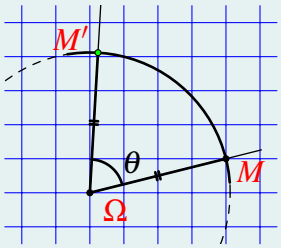
Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$. On considère un distinct point M de Ω.

1. Construire le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon la distance ΩM.
2. Soit (Δ) la droite passant par Ω et orthogonale à la droite (ΩM). Combien y-a-t-il de points M' du plan tel que : $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
3. Construire le point M'' du plan tel que : $\Omega M = \Omega M''$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M''}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Définition

Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$ et un réel θ. La **rotation** de **centre** Ω et d'**angle** θ est la transformation du plan, qui associe à tout point M du plan un point M' défini par :

- Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$.
- Si $M \neq \Omega$, alors : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$



On note cette rotation par $r(\Omega;\theta)$, ou simplement r, s'il n y a pas d'ambiguïté.

Remarque

- Une rotation de centre Ω et d'angle θ est notée par $r(\omega;\theta)$ ou r s'il n y a pas d'ambiguïté.
- Si M' est l'image de M par la rotation r, on dit que la rotation r transforme M en M'.
- La rotation de centre Ω et d'angle θ est aussi La rotation de centre Ω et d'angle $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Yassine Elamri

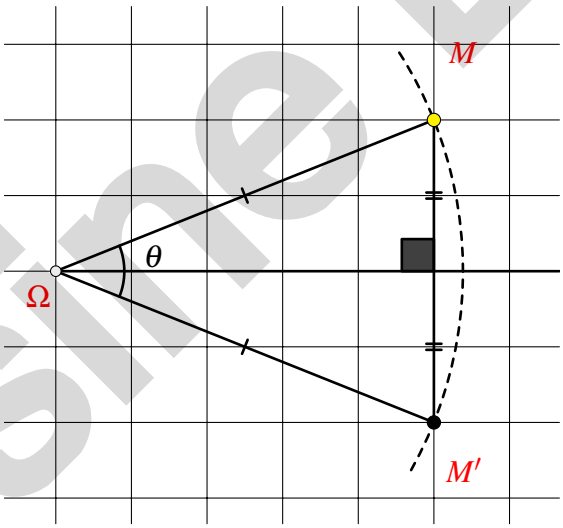
Today better than yesterday, tomorrow better than today

Conséquence

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ.

- On a $r(\Omega) = \Omega$. On dit que le point Ω est un point invariant par la rotation r.
- Si $\theta \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors Ω le centre de la rotation r est l'unique point invariant par cette rotation, et dans ce cas : Pour tout point M du plan tel que $M \neq \Omega$ et $r(M) = M'$, On a :
  - Le point M' appartient au cercle de centre Ω et de rayon la distance ΩM ;
  - La médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point Ω.
  - Le triangle $\Omega MM'$ est isocèle de sommet Ω.

Illustration géométrique

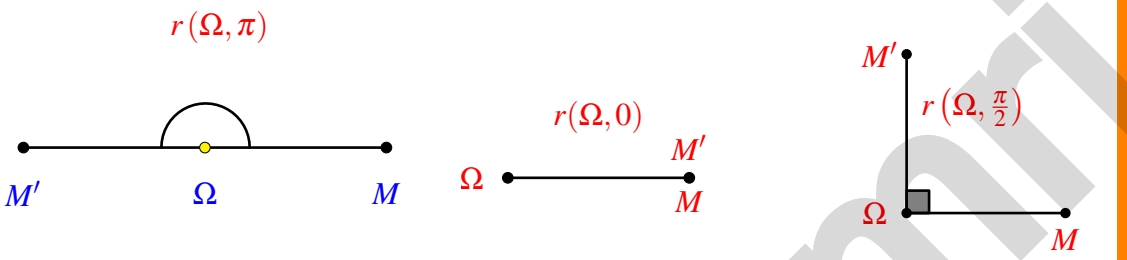


Yassine Elamri

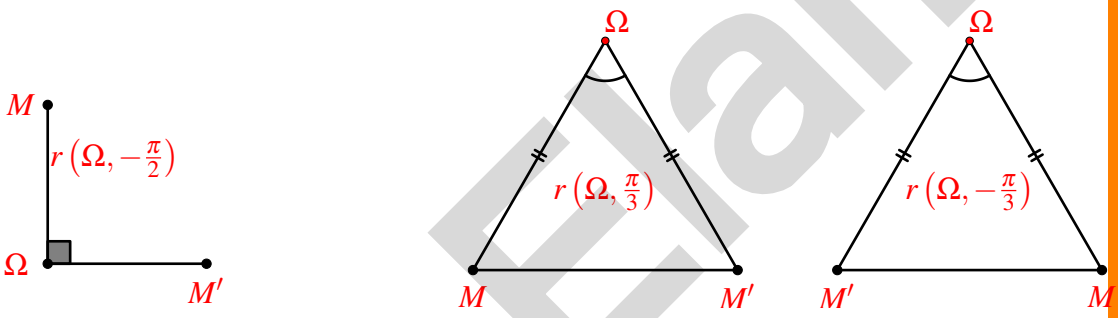
Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

Soit M et M' deux points du plan $(\mathscr{P})$. On considère la rotation $r(\Omega,\theta)$ telle que $r(M)=M'$.



- On a :



- La rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv 0\,[2\pi]$ est la transformation qui transforme tout point en du plan en lui même. Autrement dit : $\boxed{(\forall M \in (\mathscr{P}))\ r(M)=M}$.
- La rotation de centre Ω et d'angle $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$ est la symétrie centrale de centre Ω. Autrement dit : $\boxed{r(\Omega,\pi)=S_\Omega}$.
- Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Alors : $r(M)=M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle isocèle et rectangle en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On dit que la rotation r est le quart de tour direct de centre Ω.
- Si $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Alors : $r(M)=M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle isocèle et rectangle en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On dit que la rotation r est le quart de tour indirect de centre Ω.
- Si $\theta \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Alors : $r(M)=M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle équilatéral en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.
- Si $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Alors : $r(M)=M'$, si et seulement si, le triangle $\Omega MM'$ est un triangle équilatéral en Ω et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

1 Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Déterminer l'angle de la rotation de centre B et qui transforme A en C.

2 a Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et I le centre de gravité du triangle ABC. On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b Montrer que $r(A) = B$, $r(B) = C$ et $r(C) = A$

c Soit A' le milieu du segment $[BC]$. Déterminer $r(A')$.

2 Rotation réciproque d'une rotation

Activité

Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$ et θ un réel. On considère la rotation $r = r(\Omega,\theta)$ et le point M', image du point M par la rotation r avec $M \neq \Omega$.

1 Montrer que : $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M'};\overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv -\theta\,[2\pi]$.

2 En déduire que la transformation r' qui transforme M' en M est une rotation, dont on déterminera ces caractéristiques.

3 Que représente la rotation r' pour la rotation r.

Proposition

Soit Ω un point fixe du plan $(\mathscr{P})$ et θ un réel. La rotation **réciproque** de la rotation $r = r(\Omega,\theta)$ est la rotation $r(\Omega,-\theta)$ de centre Ω et d'angle θ, qu'on note r^{-1}.

Et on écrit : $(\forall M,M' \in (\mathscr{P}))\ r(M) = M' \iff r^{-1}(M') = M$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1 Déterminer $r(A)$ puis en déduire $r^{-1}(D)$.

2 Déterminer $r^{-1}(C)$ puis en déduire $r(D)$.

III Propriétés de la rotation

1 Conservation des distances

Dans tout ce qui suit r est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Activité

1 Soit A et B sont deux points du plan $(\mathscr{P})$, distinct de Ω. On pose $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

1 Montrer que : $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega A'};\overrightarrow{\Omega B'}\right)\,[2\pi]$.

2 a Écrire $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$.

b En utilisant le théorème d'Alkashi, exprimer AB^2 en fonction de ΩA, ΩB et $\cos\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)$.

3 En déduire que $A'B' = AB$.

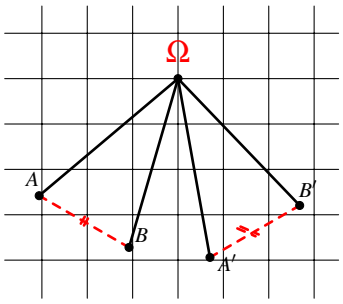
Proposition

1

Soit A et B deux points du plan $(\mathscr{P})$.

Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors $AB = A'B'$.

On dit que la rotation **conserve la distance**.



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit $ABCD$ et $DEFA$ deux carrés comme le montre tels que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Soit M un point du segment $[AB]$. Le cercle de centre A et passant par le point M coupe le segment $[AD]$ au point N et le segment $[AF]$ au point P.

1 Construire une figure convenable.

2 Montrer que : $DM = NF$ et $CN = EP$.

2 Conservation des mesures des angles orientés

Activité

2 Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$.

- On suppose que A et B sont distincts de Ω et $A \neq B$. On prend le point C distinct de Ω tel que ΩABC est un parallélogramme et le point O le centre de ΩABC. On pose $r(O) = O'$ et $r(C) = C'$.

  1 Construire une figure convenable.

  2 Montrer que O' est le milieu des segments $[\Omega B']$ et $[C'A']$.

  3 En déduire la nature du quadrilatère $\Omega A'B'C'$.

  4 Montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega C'}\right)\,[2\pi]$. En déduire que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

- On suppose que $A \neq B$ et $A \neq C$. Et on pose $r(A) = A'$,$r(B) = B'$ et $r(C) = C'$.

  1 Montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) + \left(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC}\right) \equiv 0\,[2\pi]$. Puis $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right)\,[2\pi]$.

  2 En déduire que si les points A, B et C sont alignés alors il en est de même pour les points A', B' et C'.

- On suppose que $A \neq B$ et $C \neq D$. Et on pose $r(A) = A'$,$r(B) = B'$, $r(C) = C'$ et $r(D) = D'$. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\,[2\pi]$.

Proposition

2 Soit A et B deux points distincts du plan $(\mathscr{P})$. Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

2 Soit ABC un triangle. On considère deux triangles ABD et ACE rectangles et isocèles au sommet commun A. Montrer que $(BE) \perp (CD)$

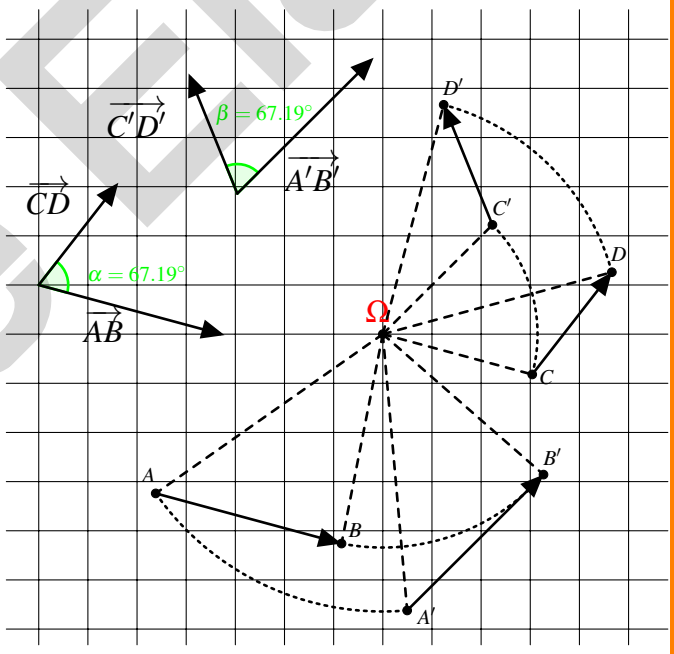
Remarque

La proposition précédente permet de déterminer l'angle d'une rotation à partir de deux points distincts et leurs images.

Proposition

3

Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ tels que $A \neq C$ et $C \neq D$ et A', B', C' et D' leurs images respectives par la rotation r. Alors $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$. On dit que la rotation conserve les mesures des angles orientés.



Exemple

3 Soit ABC un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$. Soit D le symétrique du point B par rapport à la droite (AC) et E le symétrique du point C par rapport à la droite (AD). Montrer que $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA}\right)[2\pi]$.

Yassine Elamri

Todhttps://steinmath.com tomorrow better than today

3 Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Activité

3 Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ où $k \in \mathbb{R}^*$.Soit A', B', C' et D' les images respectives des points A, B, C et D par la rotation r.

1 Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$ suivant le signe du réel k.

2 a On suppose que $k > 0$. Montrer que $A'B' = kC'D'$ et $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv [2\pi]$, puis déduire que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

b Montrer que si $k > 0$ on a $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

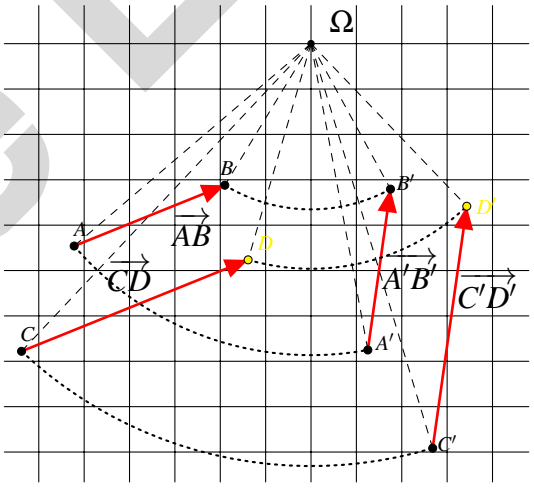
Proposition

4

Soit A, B, C et D quatre points du plan $(\mathscr{P})$ tels que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$, $r(C) = C'$ et $r(D) = D'$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que la rotation conserve le coefficients de colinéarité de deux vecteurs.



ssi l'alignement de trois points ainsi que le barycentre de deux points pon-

erve le b centre de tro u quatre poi pondé s.

ei milieu d gnent ains que l centre d gravité d t

triangle.

ine Elamri
https://st

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit $ABCD$ un carré et AED et AFB deux triangles équilatéraux tels que le point F est à l'extérieur et le point E est à l'intérieur de $ABCD$. On considère la rotation $r = r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$, on pose $r(C) = K$.

1. Montrer que $r(B) = F$ et $r(D) = E$.
2. Montrer que les points B, D et K sont alignés.
3. En déduire que les points E, C et F sont alignés.

Application

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est positif. On construit en dehors du triangle ABC les carrés $ACDE$, $BAFG$ et $CBHI$.

1. En utilisant une rotation convenable, montrer que $(AI) \perp (BD)$.
2. montrer que $(AH) \perp (CG)$.
3. On considère la rotation $r = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$. Soit J le milieu du segment $[EF]$ et on pose : $r(J) = J'$.
   a. Montrer que le point J' appartient à la droite passant par le point A et parallèle à la droite (BC).
   b. En déduire que la droite (AJ) est une hauteur du triangle ABC.

Application

Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés tels que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $AE = AB$.

1. Soit r la rotation de centre A et transformant le point B en E.
   a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r. Montrer que : $r(C) = F$ et $r(D) = G$.
   b. Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.
2. Soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;-1)$. On pose : $r(G) = G'$. Montrer que les points G, F et G' sont alignés.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

IV Image de certaines figures par une rotation

Activité

1 **Image d'une droite par une rotation**. Soit r une rotation et (Δ) une droite du plan $(\mathscr{P})$. Soit A et B deux points distincts de la droite (Δ) et A' et B' leurs images respectives par la rotation r. Soit M un point de (Δ) tel que $M \neq A$ et $M \neq B$ et $M' = r(M)$.

a i. Montrer que $A' \neq B'$. On pose $(\Delta') = (A'B')$.

ii. Montrer que $M \in (\Delta) \iff \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) \equiv 0[\pi]$

iii. En déduire que $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) \equiv 0[\pi]$. Conclusion : $\boxed{(\forall M \in (\Delta))\ r(M) \in (A'B')}$

b Réciproquement :

i. Soit N' un point de la droite (Δ'). Montrer qu'il existe un point N de la droite (Δ) tel que $r(N) = N'$.

ii. En déduire que $(\Delta') \subset r((\Delta))$

c En déduire que $r((\Delta)) = (\Delta)$

2 **Image d'un segment par une rotation**. Soit M un point du plan $(\mathscr{P})$ tel que $MA + MB = AB$ et $M' = r(M)$.

a Montrer que $M'A' + M'B' = A'B'$.

b En déduire que $r([AB]) = [A'B']$.

3 **Image d'un cercle par une rotation**. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}(O;R)$ et $M' = r(M)$ et $O' = r(O)$ où O est un point et $R \in \mathbb{R}$.

a Montrer que $M \in \mathscr{C}(O;R) \Longrightarrow M' \in \mathscr{C}(O';R)$.

b Soit $N' \in \mathscr{C}(O';R)$. Montrer qu'il existe un point $N \in \mathscr{C}(O;R)$ $r(N) = N'$.

c En déduire que l'image du cercle $\mathscr{C}(O;R)$ est le cercle $\mathscr{C}(O';R)$.

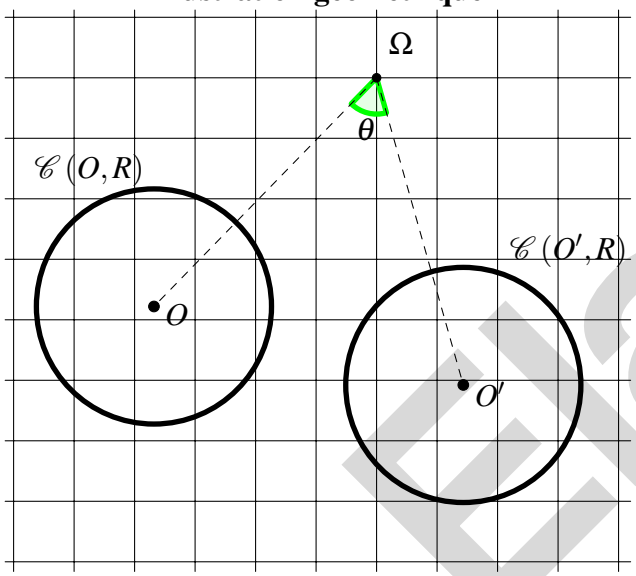
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Proposition

L'image du cercle $\mathscr{C}(O;R)$ est le cercle $\mathscr{C}(O';R)$ où $O' = r(O)$.

Illustration géométrique

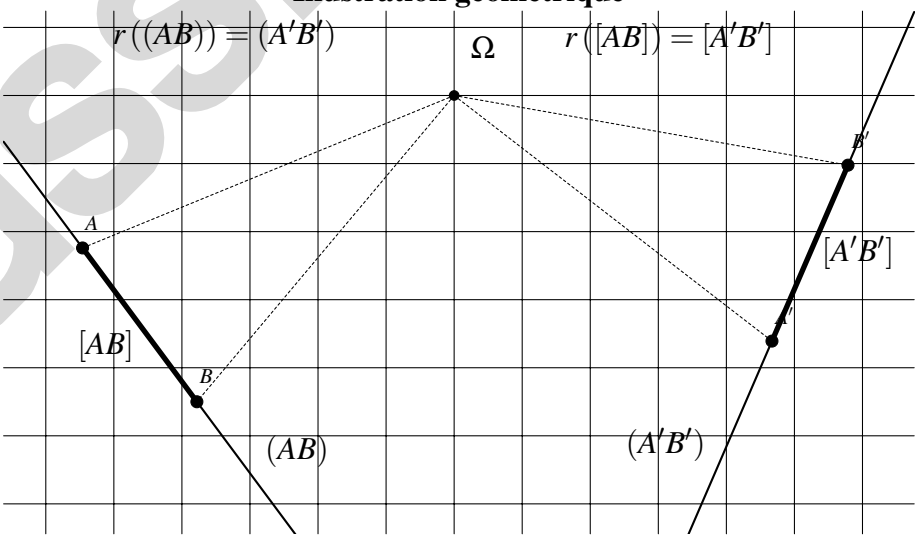


Proposition

Soit A et B deux point du plan $(\mathscr{P})$. Si $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ alors :

$$r((AB)) = (A'B') \quad \text{et} \quad r([AB]) = [A'B'] \quad \text{et} \quad r([AB)) = [A'B')$$

Illustration géométrique



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et I le milieu du segment $[BC]$. On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre C et passant par I. On pose $(\mathscr{C}') = r((\mathscr{C}))$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que : $r(A) = B$ et $r(C) = A$.
3. Soit E et F deux point du plan tels que $\{E\} = (AC) \cap (\mathscr{C})$ et $\{F\} = (AB \cap)(\mathscr{C}')$. Montrer que : $r(E) = F$

s parallèles

perpendicu-

.

angle

uilatéral.

1))

$(\mathscr{C})$ le cercle de

n K. Construire

http

Today better than yesterday, tomorrow better than today