Rotation dans le plan

Série d'exercices

Dans tout ce qui suit $(\mathscr{P})$ est le plan orienté positivement

Exercice : 1

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est positive. On considère r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O et d'angle α.

1) Déterminer $r_A(A)$, $r_A(B)$ et $r_A(D)$.

2) Déterminer une valeur de α pour avoir $r_O(A) = B$. Même question pour avoir $r_O(A) = C$.

Exercice : 2

Soit ABC un triangle. On considère D et E deux point à l'extérieur du triangle ABC tels que : ABD et ACE sont deux triangles isocèles et rectangles en A.

1) Montrer que : BE et CD

2) Montrer que : $(BE) \perp (CD)$.

Exercice : 3

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est positive. On considère les points D, E, F et G à l'extérieur du triangle ABC tels que $ABDE$ et $ACFG$ sont deux carrés. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer $r(E)$ et $r(C)$.

2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$.

Yassine Elamri

Exercice : 4

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ est positive. On considère les deux points I et J qui vérifient : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$.

Exercice : 5

Soit ABC un triangle isocèles et rectangles en B tel que la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$ est positive et O le milieu du segment $[AC]$. On considère les deux points E et F vérifiant $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

1) Construire une figure convenable.
2) Déterminer $r(A)$ et $r(B)$.
3) Montrer que : $r(E)=F$.
4) En déduire la nature du triangle OEF.

Exercice : 6

Soit ABC un triangle isocèles et rectangles en A tel que la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ est positive et O le milieu du segment $[BC]$. On considère les deux points D et E vérifiant $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$. Montrer que ODE est un triangle isocèle et rectangle en O.

Exercice : 7

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ est positive. On considère la droite (D) la droite parallèle à (BD) coupant les deux droites (AD) et (AB) respectivement en M et N. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $r(E)=M$ et $r(F)=N$.

1) Construire une figure convenable.
2) Montrer que $(EF)\perp(MN)$.
3) Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r.
4) Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice : 8

Soit ABC un triangle rectangles en A tel que la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ est positive noté α. On considère la rotation r de centre B et d'angle α.

1) Construire les points E et F tels que $r(A)=E$ et $r(C)=F$.
2) Montrer que $(EF)\perp(BC)$.
3) Soit $(AC)\cap(EF)=\{I\}$ et $r(I)=J$.
   a) Montrer que les points E, F et J sont alignés.
   b) Montrer que le point E est le milieu du segment $[EF]$.
4) Soit $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$. Montrer que $r(K)=C$.

Exercice : 9

Soit ABC est un triangle équilatéral et $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ qui ne contient pas le point B distinct de A et C et I un point appartenant au segment $[MB]$ tel que $AM=IM$.

1) Montrer que le triangle IMA est équilatéral.
2) On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $r(B)$ et $r(I)$. Puis déduire que $MA+MC=MB$.

Exercice : 10

Soit $ABCD$ un carré de centre O et N et M deux points appartenant respectivement à $[BC]$ et $[AB]$ tel que $AM=BN$.

1) Montrer que le triangle MON est isocèle et rectangle.
2) Soit le point I le milieu du segment $[AN]$. Montrer que $IO=IB$.
3) Déterminer le lieu géométrique du point I, lorsque le point M varie sur le segment $[AB]$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice : 11

Soit (D) une droite et A un point n'appartenant pas à (D). On considère les deux points B et C deux points de la droite (D) tels que : $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$. Déterminer le lieu géométrique du point B' le symétrique du point B par la symétrie orthogonale d'axe (AC) lorsque les deux points B et C varient sur la droite (D).

Exercice : 12

Soit ABC est un triangle équilatéral de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) Montrer que $r(A) = B$ et $r(B) = C$
2) En déduire $r([AB])$.
3) Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[BC]$ tels que $BP = AM$.
   a) Montrer que $r(M) = P$ et en déduire que $OM = OP$.
   b) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}\right)$.
   c) Calculer la distance MP en fonction de OM.
   d) Déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que la distance MP soit minimale.

Exercice : 13

Soit ABC est un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Soit M un point à l'intérieur du triangle ABC. On note H_C, H_B et H_A les projetés orthogonaux de M sur les segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ respectivement.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1) Soit r_1 la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Posons : $M' = r_1(M)$.

   a) Montrer que BMM' est un triangle équilatéral.

   b) Notons H' le projeté orthogonale de M' sur le segment $[AB]$. Montrer que : $M'H' = MH_A$.

2) Considérons la droite (Δ) tel que $(\Delta) \parallel (AB)$ et $M' \in (\Delta)$; soit $(\Delta) \cap (MH_C) = \{N\}$. Montrer que $MN = MH_A + MH_C$.

3) Soit $r_2 = r\left(M, \frac{\pi}{3}\right)$. Montrer que $B \in r_2((\Delta))$.

4) Déduire que : $MH_A + MH_B + MH_C = AH_A = BH_B = CH_C$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today