Chapitre

Étude et représentation graphique d'une fonction

Cours TCL

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• On admettra les branches infinies de la courbe d'une fonction polynôme de troisième degré. • On s'intéressera à la résolution graphique des équations et des inéquations de la forme $f(x) = c$ et $f(x) \leqslant c$, f étant une fonction figurant au programme, dans le cas où la résolution algébrique n'est pas à la portée des élèves.	• Utiliser les éléments de symétrie de la courbe d'une fonction pour réduire son domaine d'étude. • Représenter graphiquement des fonctions polynômes de degré deux ou trois et des fonctions homographiques. • Utiliser la représentation graphique d'une fonction ou son tableau de variations pour étudier les solutions de certaines équations et inéquations

Contenu du programme	Les prés-requis
• Axe de symétrie, centre de symétrie. • Asymptote horizontale ; asymptote verticale. • Exemples d'étude et de représentation des fonctions : $x \leftarrow ax^2+bx+c$; $x \leftarrow \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $x \leftarrow ax^3+bx^2+cx+d$	• Fonctions affines et linéaires • Fonctions polynômiales • Ensemble de définition d'une fonction • Équations et inéquations

Yassine Elamri

I Asymptote verticale et asymptote horizontale

1 Asymptote verticale

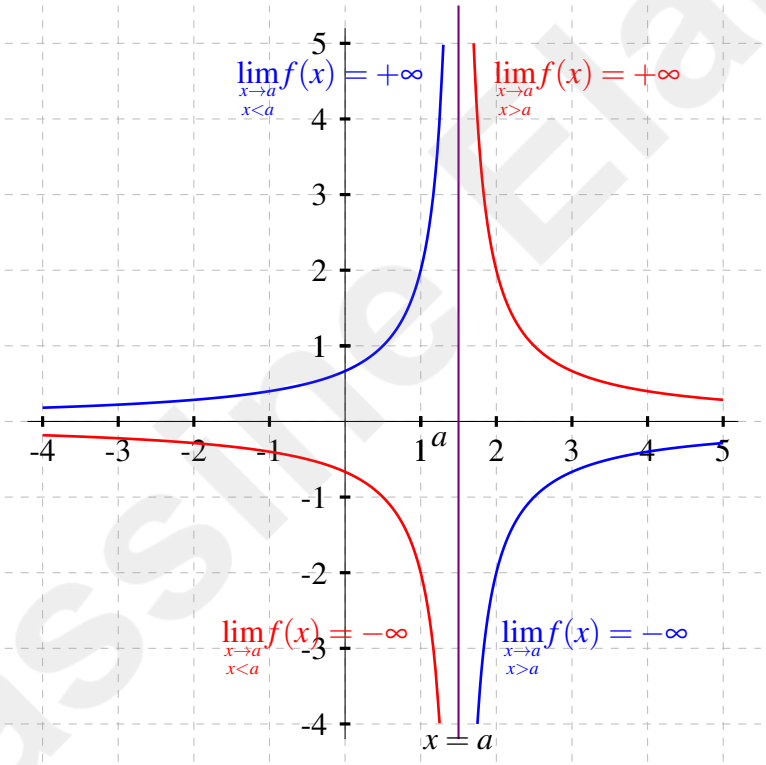
Propriété

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et a un réel .

Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\pm\infty$

On dit que la droite d'équation : $x=a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)

L'interprétation géométrique :



• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x+7}{x-1}$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3x+7\\x>3x+7}} \dfrac{3x+7}{x-1}=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} 3x+7=10$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} x-1=0^+$

Et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \dfrac{3x+7}{x-1}=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} 3x+7=10$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} x-1=0^-$

Donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)

Yassine Elamri

2 Asymptote horizontale

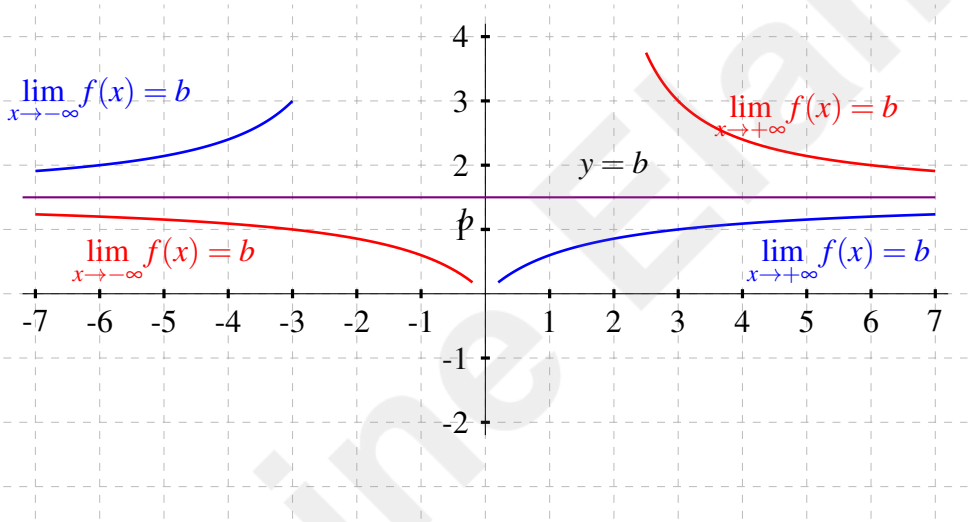
Propriété

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et b un réel .

: • Si : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, alors, on dit que la droite d'équation : $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

: • Si : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, alors, on dit que la droite d'équation : $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

L'interprétation géométrique :



• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

Donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Yassine Elamri

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2 Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$

Puis déduire les équations des asymptotes de la courbe (C_f)

3 En déduire les asymptotes de la courbe (C_f)

II Élément de symétrie d'une courbe d'une fonction

1 Axe de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On a dit que la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) :

si et seulement si : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{D}_f):(2a-x)\in D_f\\(\forall x\in\mathbb{D}_f):f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

Remarque

- Si la droite $(D):x=a$ est l'axe de symétrie de la courbe de la fonction numérique f, son étude peut se restreindre à l'ensemble $D_f\cap[a;+\infty[$
- Une fonction f est paire si et seulement si la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est l'axe de symétrie de la courbe de la fonction f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2-x+2$

Montrons que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de (C_f) la courbe de f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2}{3}x^2-5$

Montrons que la fonction f est impaire , en déduire son domaine d'étude

Yassine Elamri

2 Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On a dit que Le point $\Omega(a;b)$ $(a\in\mathbb{R};b\in\mathbb{R})$ est un centre de symétrie de la courbe $(_f)$:

si et seulement si : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{D}_f):(2a-x)\in D_f\\(\forall x\in\mathbb{D}_f):f(2a-x)+f(x)=2b\end{cases}$

Remarque

- Si le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction numérique f, son étude peut se restreindre à l'ensemble $D_f\cap[a;+\infty[$
- Une fonction f est impaire si et seulement si le point $O(0;0)$ (l'origine du repère) est le centre de symétrie de la courbe de la fonction f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Montrons que le point $\Omega(1;2)$ $(a=1;b=2)$ est le centre de symétrie de (C_f) la courbe de f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=4x^3+\dfrac{3}{4}x$

Montrons que la fonction f est impaire , en déduire son domaine d'étude

III Étude de quelques fonctions numériques

1 Étude de la fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

• Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par; $f(x)=-2x^2+8x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ et $f(2)$
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

Yassine Elamri

3. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variations de la fonction f
4. Montrer que la fonction f admet une valeur minimale à déterminer
5. a. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses
   b. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées
6. Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0
7. Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

• Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ; $f(x)=x^2-6x+5$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Calculer $f(0)$,$f(1)$ et $f(-1)$
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variations de la fonction f
4. Montrer que la fonction f admet une valeur minimale à déterminer
5. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses
6. Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0
7. Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

2 Étude de la fonction $x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

• Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par ; $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Calculer $f(0)$ et $f(\sqrt{3})$
2. Montrer que la fonction f est impaire ,en déduire $f(-\sqrt{3})$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4. Calculer $f'(x)=(x-1)(x+1)$ pour tout x réel et donner le tableau de variations de la fonction f
5. Construire la courbe (C_f) dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$
7. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $f(x)>0$ et $f(x)\leqslant 0$

Yassine Elamri

8 Déterminer graphiquement le nombre de solutions de les équations suivantes :
• $f(x) = -\frac{7}{11}$ • $f(x) = 2023$

• Exemple

Soit f la fonction numérique définie par ; $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 a Vérifier que $(\forall x \in D_f) : f(x) = (x-1)(x^2+x-2)$

b Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses

3 Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variations de la fonction f

4 Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2

5 Calculer : $f(0)$; $f(2)$ et $f(-1)$

6 Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

7 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $f(x) > 4$ et $f(x) \leqslant 4$

3 Étude de la fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2 calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(-\frac{1}{2})$

3 Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$
Puis déduire les équations des asymptotes de la courbe (C_f)

4 Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variation de la fonction f

5 Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0

6 Construire la courbe (C_f) et la tangente (Δ) et les asymptotes de la courbe (C_f) dans le même repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

Yassine Elamri

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x-3}{2-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2. calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$
3. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$
   Puis déduire les équations des asymptotes de la courbe (C_f)
4. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variation de la fonction f
5. Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 3
6. Construire la courbe (C_f) et la tangente (Δ) et les asymptotes de la courbe (C_f) dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Yassine Elamri