Les puissances

I Puissance d'un nombre rationnel

Activité

1 a Vérifier que : $\frac{-3}{7} \times \frac{-3}{7} \times \frac{-3}{7} = \frac{(-3)^3}{7^3}$

b Peut-on écrire le produit $\frac{-3}{7} \times \frac{-3}{7} \times \frac{-3}{7}$ sous forme d'une puissance ?

2 a On utilisant, une calculatrice, calculer : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

b Calculer la puissance : $\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$. Que remarques-tu ?

1 Puissance à exposant positif

Définition

Soit a un nombre rationnel et n un nombre entier naturel non nul

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

la puissance n de a
a exposant n
a puissance n

a^{n} : n = l'exposant, a = la base

➪ ***Cas particulier***

☆ Si a est un nombre rationnel non nul, alors :

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

☆ a^2 se lit : a exposant 2, ou a puissance 2, ou a au carrée
☆ a^3 se lit : a exposant 3, ou a puissance 3, ou a au cube

Remarque

La puissance 0^0 n'existe pas

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than https://steinmath.com

EXEMPLES

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$
- $11^3 = 11 \times 11 \times 11 = 121 \times 11 = 1331$
- $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$
- $\left(\frac{-5}{4}\right)^3 = \left(\frac{-5}{4}\right) \times \left(\frac{-5}{4}\right) \times \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{-125}{64}$
- $\left(\frac{11}{45}\right)^0 = 1$
- $(-25)^1 = -25$

⚠ Soit a un nombre rationnel non nul et n un nombre entier naturel
☆ Si n est pair, alors $(-a)^n = a^n$
☆ Si n est impair, alors $(-a)^n = -a^n$

EXEMPLES

- ✯ $(-4)^3 = -4^3 = -4 \times 4 \times 4 = -64$
- ✯ $(-5)^4 = 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$
- ✯ $\left(\frac{-4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$

2 Puissance à exposant négatif

Définition

Soient x et $\frac{a}{b}$ deux nombres rationnels non nuls, et n un nombre entier naturel

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \;;; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

EXEMPLES

- ★ $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
- ★ $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$
- ★ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$
- ★ $\left(\frac{-4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{-5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

3 Le signe d'une puissance

Activité

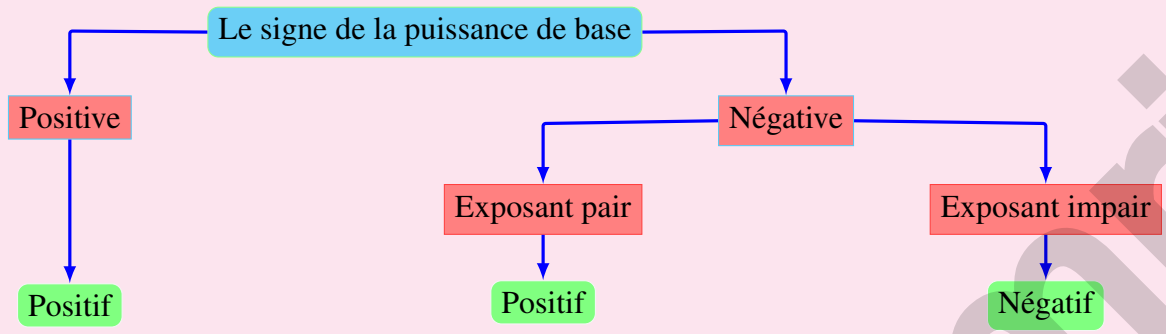
Calculer les puissances suivantes : 10^{-3} ;; 1^{-12} ;; 5^{-2} ;; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$;; $(-5)^{-4}$;; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

Que remarques-tu à propos du signe d'une puissance d'un nombre rationnel ?

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Règle



EXEMPLES

- ★ 7^{35} est positif car la base 7 est positif
- ★ $(-11)^{24}$ est positif car l'exposant 24 est pair
- ★ $\left(\frac{-3}{7}\right)^{33}$ est négatif car la base $\frac{-3}{7}$ est négatif et l'exposant 33 est impair
- ★ -5^2 est négatif car la base c'est 5 et pas -5

Application

Calculer les puissances suivantes :

★ $a = 25^2$

★ $b = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

★ $c = \left(\frac{-7}{5}\right)^{-3}$

★ $d = \left(\frac{-9}{7}\right)^{-2}$

★ $e = -\left(\frac{-1}{2}\right)^{5}$

Solution

★ $a = 25^2 = 25 \times 25 = 625$

★ $b = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$

★ $c = \left(\frac{-7}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{-5}{7}\right)^{3} = -\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = -\frac{125}{343}$

★ $d = \left(\frac{-9}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{-7}{9}\right)^{2} = \left(\frac{7}{9}\right)^{2} = \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$

★ $e = -\left(\frac{-1}{2}\right)^{5} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{32}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Les opérations sur les puissances

Activité

1 Écrire sous forme d'une puissance : $\dfrac{(-5)^5}{4^5}$

Prouver que : $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

2 Simplifier la puissance suivante : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

Prouver que : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \times \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+m}$

3 Simplifier la puissance suivante : $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{-4}{5}\right)^3$

Prouver que : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \times \left(\dfrac{c}{d}\right)^n = \left(\dfrac{a \times c}{b \times d}\right)^n$

4 Simplifier la puissance suivante : $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^5$

Prouver que : $\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n \times m}$

5 Simplifier la puissance suivante : $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^5}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}$

Prouver que : $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n-m}$

Propriété

Soient a et b deux nombres rationnels non nuls, et n et m deux nombres entiers relatifs

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Exemples

- $a = 7^3 \times 7^7 = 7^{3+7} = 7^{10}$
- $b = \dfrac{12^{23}}{12^{15}} = 12^{23-15} = 12^8$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

✪ $c = \dfrac{21^5}{3^5} = \left(\dfrac{21}{5}\right)^5 = 7^5$

✪ $d = \left(12^{-5}\right)^4 = 12^{(-5)\times 4} = 12^{-20}$

✪ $e = 25^{14} \times 10^{14} = (25 \times 10)^{14} = 250^{14}$

✪ $f = \left(\dfrac{-5}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{-5}{3} \times \dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{-5}{6}\right)^4$

✪ $g = \left(\dfrac{-7}{5}\right)^{11} \times \left(\dfrac{-7}{5}\right)^{-20} = \left(\dfrac{-7}{5}\right)^{11+(-20)} = \left(\dfrac{-7}{5}\right)^{-9}$

✪ $h = \left(\left(\dfrac{-7}{6}\right)^{11}\right)^{-6} = \left(\dfrac{-7}{6}\right)^{11\times(-6)} = \left(\dfrac{-7}{6}\right)^{-66}$

✪ $i = \dfrac{\left(\frac{7}{11}\right)^{-17}}{\left(\frac{7}{11}\right)^{-20}} = \left(\frac{7}{11}\right)^{-17-(-20)} = \left(\frac{7}{11}\right)^{-17+20} = \left(\frac{7}{11}\right)^3$

✪ $j = \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3}{\left(\frac{-1}{3}\right)^3} = \left(\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{-1}{3}}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{5} \times \dfrac{-3}{1}\right)^3 = \left(\dfrac{-6}{5}\right)^3$

Application

1 Calculer les puissances suivantes :

☛ $A = \left(\dfrac{-1}{2}\right) \times \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2$

☛ $B = \left(\dfrac{11}{7}\right)^{11} \times \left(\dfrac{11}{7}\right)^{-11}$

☛ $C = \dfrac{5^7}{5^6 \times (5^2)^{-1}}$

☛ $D = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3}$

2 Soient a et b deux nombres rationnels non nuls
Écrire sous forme d'une puissance :

☛ $A = a^{-3} \times a^4 \times \dfrac{1}{a^7}$

☛ $B = \dfrac{\left(a^5 \times a\right)^{-2}}{a^3}$

☛ $C = \dfrac{\left(a \times b^2\right)^{-3} \times a}{a^{-5} \times b^{-3}}$

Solution

1 ➠ $A = \left(\dfrac{-1}{2}\right) \times \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{1+2} = \dfrac{-1}{8}$

➠ $B = \left(\dfrac{11}{7}\right)^{11} \times \left(\dfrac{11}{7}\right)^{-11} = \left(\dfrac{11}{7}\right)^{11+(-11)} = \left(\dfrac{11}{7}\right)^0 = 1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$$\rightarrow C = \frac{5^7}{5^6\times(5^2)^{-1}} = \frac{5^7}{5^6\times 5^{-2}} = \frac{5^7}{5^{6+(-2)}} = \frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$$

$$\rightarrow D = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2\times 3}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6}{\left(\frac{2}{3}\right)^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

2 $\rightarrow A = a^{-3}\times a^4\times\frac{1}{a^7} = a^{-3+4}\times a^{-7} = a\times a^{-7} = a^{1+(-7)} = a^{-6}$

$$\rightarrow B = \frac{(a^5\times a)^{-2}}{a^3} = \frac{(a^{5+1})^{-2}}{a^3} = \frac{(a^6)^{-2}}{a^3} = \frac{a^{6\times(-2)}}{a^3} = \frac{a^{-12}}{a^3}$$
$$= a^{-12+(-3)} = a^{-15}$$

$$\rightarrow C = \frac{(a\times b^2)^{-3}\times a}{a^{-5}\times b^{-3}} = \frac{a^{-3}\times b^{2\times(-3)}\times a}{a^{-5}\times b^{-3}} = \frac{a^{-3+1}\times b^{-6}}{a^{-5}\times b^{-3}} = \frac{a^{-2}\times b^{-6}}{a^{-5}\times b^{-3}}$$
$$= a^{-2-(-5)}\times b^{-6-(-3)} = a^{-2+5}\times b^{-6+3} = a^3\times b^{-3}$$

III L'écriture scientifique (La notation scientifique)

Activité

1 a Calculer les puissances suivantes : 10^4 ;; 10^5 ;; 10^{-3} ;; 10^{-2}

b Généraliser ce résultat pour : 10^n et 10^{-n}

2 a Écrire, sous la forme $a\times 10^n$, avec n un entier relatif, et a un décimal tel que $1\leqslant a<10$:
900000 ;; 2500000000 ;; 0.0000007 ;; 0.00712

b Comment appelle-t-on ces écritures (notations) obtenues ?

Définition

Soit a un nombre décimal et n un nombre entier relatif non nul
Toute écriture de la forme $x=a\times 10^n$ ou $x=-a\times 10^n$ s'appelle écriture (ou notation) scientifique de x

EXEMPLES

$\rightarrow a = 3452 = 3.452\times 10^3$

$\rightarrow b = -0.00000234 = 2.34\times 10^{-6}$

$\rightarrow c = 678.23\times 10^5 = 6.7823\times 10^2\times 10^5 = 6.7823\times 10^7$

$\rightarrow d = -0.000254\times 10^{-9} = -2.54\times 10^{-4}\times 10^{-9} = -2.54\times 10^{-13}$

$\rightarrow e = -24.5\times 10^{-11}\times 1.2\times 10^3 = -24.5\times 1.2\times 10^{-11}\times 10^3 = -29.4\times 10^{-8}$
$= -2.94\times 10\times 10^{-8} = -2.94\times 10^{-7}$

$\rightarrow f = -113\times 10^5+7.2\times 10^7 = -113\times 10^5+7.2\times 10^2\times 10^5 = -113\times 10^5+720\times 10^5$
$= (-113+720)\times 10^5 = 607\times 10^5 = 6.07\times 10^2\times 10^5 = 6.07\times 10^7$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

➠ $f = -113\times10^5+7.2\times10^7 = -1.13\times10^2\times10^5+7.2\times10^7 = -1.13\times10^7+7.2\times10^7$
$= (-1.13+7.2)\times10^7 = 6.07\times10^7$

✺ ***Ordre de grandeur: :***

Écriture scientifique	Encadrement par deux puissances successives de 10	Un ordre de grandeur
★ $A = 2.13\times10^5$	★ $10^5 < A < 10^6$	★ 2×10^5
★ $B = 7.28\times10^{-3}$	★ $10^{-3} < B < 10^{-2}$	★ 7×10^{-3}
★ $C = 9.62\times10^{-5}$	★ $10^{-5} < C < 10^{-4}$	★ 9×10^{-5}

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today