Nombres complexes

I L'ensemble $\mathbb{C}$ - forme algébrique

1 L'ensemble $\mathbb{C}$

Proposition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec a et b réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Exemple

$z_1 = 2 + 3i \in \mathbb{C}$; $z_2 = -3 \in \mathbb{C}$; $z_3 = 2i \in \mathbb{C}$ et $z_4 = -\sqrt{7} \in \mathbb{C}$

Remarque

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2 Forme algébrique

D Définition

- L'écriture $z = a + ib$ est appelée **la forme algébrique** du nombre complexe z.
- le réel a est la partie réelle de z, notée $\Re e(z)$.
- le réel l b est la partie imaginaire de z notée $\Im m(z)$.

d'après l'unicité de l'écriture sous la forme algébrique on donc

COROLAIRE

deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire

soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ on a $z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

Cas particulier

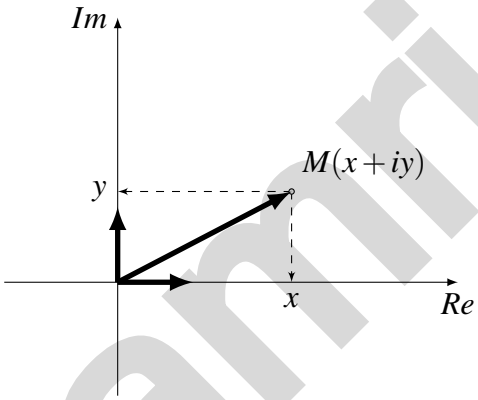
- Si $\Re e(z) = 0$ on dit que z est **imaginaire pure** L'ensemble des imaginaires pur est noté $i\mathbb{R}$
- Si $\Im m(z) = 0$ on dit que z réel

Yassine Elamri

II Représentation graphique d'un complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ direct .

- A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réel, on associe le point M de coordonnées $(x;y)$. On dit que M, ou que le vecteur $\vec{OM}$ est l' image de z. est que z est l'affixe du point M ou du vecteur $\vec{OM}$.
- L'affixe de M se note souvent z_M et celui de $\vec{OM}$ se note $\textbf{aff}(\vec{OM})$
- L'axe des abscisses $(O;\vec{u})$ est appelé **axe des réels**, l'axe des ordonnées
- Le plan est alors appelé plan complexe. $(O;\vec{v})$ est appelé axe des **imaginaires purs**.



Application

1 Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1-2\mathrm{i}$, $z_B = 2-\mathrm{i}$ et $z_C = \frac{3}{2}+\mathrm{i}$

2 calculer les distance OA et AB

III Opérations sur les nombres complexes

1 Règles du calcul

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent au nombres complexes.

Application

Écrire les nombres complexes suivents sous la forme algebrique

- $4-(3-\mathrm{i})$
- $\mathrm{i}(2+5\mathrm{i})+3(2-\mathrm{i})$
- $(2-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$
- $(3-\mathrm{i})^2$
- $(\sqrt{2}-\mathrm{i})(\sqrt{2}+\mathrm{i})$
- $(2-\mathrm{i})^3$
- $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)$
- $(a+\mathrm{i}b)^2$

Application

1 Calculer i^3, i^4, i^5 i^7, i^8, i^9

2 En déduire la forme algébrique de $z_n = \mathrm{i}^n$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

3 Donner la forme algébrique de i^{2001}, i^{1430}, i^{2019}

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Inverse d'un complexe non nul

Proposition

tout nombre complexe non nul z admet un inverse noté $\frac{1}{z}$

• Preuve

soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x,y) \neq (0,0)$

Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$

Application

Mettre sous la forme algébrique • $\frac{1}{\mathrm{i}}$ • $\frac{2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ • $\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\sqrt{2}+1}$ • $\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

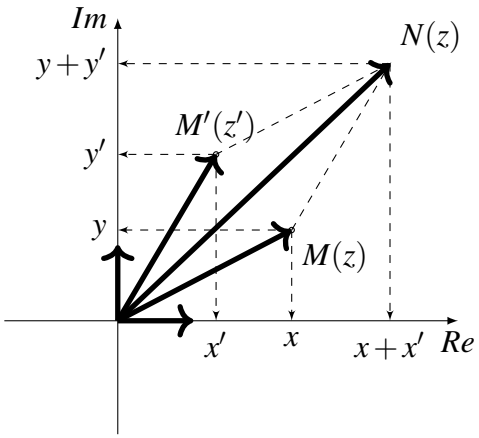
Application

Soientt $z_1 = -1+2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1-\mathrm{i}$ deux nombres complexes ;

Écrire sous la forme algébrique : • $z_1^2 - z_2$ • $z_1 z_2^2$ • $\frac{z_1}{z_2}$ • $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

3 Interprétations géométriques

Soit M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives $z = x+\mathrm{i}y$ et $z' = x'+\mathrm{i}y'$. N et P deux points tels que :
$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$
On a $z+z' = (x+x')+\mathrm{i}(y+y')$ et $kz = kx+\mathrm{i}ky$
aff$(\overrightarrow{ON}) = z+z'$ et **aff**$(\overrightarrow{OP}) = kz$



Propriété

Soit A et B deux points du plan complexes d'affixe respectives z_A et z_B
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un réel

- ***aff***$(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$
- ***aff***$(\vec{u}+\vec{v})$=***aff***$(\vec{u})$+***aff***$(\vec{v})$ et ***aff***$(k\vec{u}) = k$***aff***$(\vec{u})$
- $\vec{u} = \vec{v} \Longleftrightarrow$***aff***$(\vec{u})$=***aff***$(\vec{v})$
- Soit I le milieu de $[AB]$.on a $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- A, B et C sont alignés si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}$: $z_B - z_A = k(z_C - z_A)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Dans le plan complexe munie du repère o.n.d $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A, B et C qui ont pour affixe respectives $z_A=-2+\mathrm{i}$, $z_B=3+3\mathrm{i}$ et $z_C=1+\dfrac{11}{5}\mathrm{i}$

1. calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. En déduire que A, B et C sont alignés
3. Placer les points A, B et C

Application

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=3+\mathrm{i}$, $z_B=2-2\mathrm{i}$, $z_C=2\mathrm{i}$ et $z_D=1+5\mathrm{i}$

1. faire une figure
2. montrer que $ABCD$ est un parallélogramme
3. calculer l'affixe de son centre

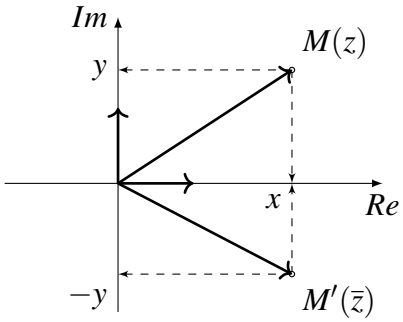
IV Conjugué d'un nombre complexe

D Définition

Soit $z=a+\mathrm{i}b$ $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ un nombre complexe. on appelle **conjugué** de z noté $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z}=a-\mathrm{i}b$

Interprétation géométrique

Dans le plan complexe si le point M a pour affixe z, alors l'image M' de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe réel



Exemple

• $\overline{2+\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$ • $\overline{3-\mathrm{i}\sqrt{2}}=3+\mathrm{i}\sqrt{2}$ • $\overline{2\mathrm{i}}=-2\mathrm{i}$ • $\overline{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

Propriété

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\overline{z}=a^2+b^2$
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^{n}$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ $(z\neq 0)$
- $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ $(z\neq 0)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Conéquences

- $z+\overline{z}=2\Re e(z)$ et $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\Im m(z)$
- $z\in\mathbb{R}$ (réel) $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=z\Longleftrightarrow\Im m(z)=0$
- $z\in\mathrm{i}\mathbb{R}$ (imaginaire pur) $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=-z\Longleftrightarrow\Re e(z)=0$

Exemple

Soit les nombres complexe $z_1=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ et $z_2=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$

1. Vérifier que $z_1=\overline{z_2}$, et en déduire que z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.
2. Simplifier z_1+z_2 et z_1-z_2

Application

résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivante

1. $4\overline{z}+2\mathrm{i}-4=0$
2. $(1+\mathrm{i})\overline{z}+1-\mathrm{i}=0$
3. $3\overline{z}-2\mathrm{i}z=5-3\mathrm{i}$
4. $z^2-3\overline{z}+2=0$

Application

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $Z=z^2+\overline{z}$ soit un réel

Application

oit z un nombre complexe $\neq-1$. on pose $Z=\dfrac{z-1}{z+1}$.

1. On pose $z=x+\mathrm{i}y$ déterminer $\Re e(Z)$ et $\Im m(Z)$ en fonction de x et y
2. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que Z est imaginaire pur

Application

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z)=z^2+4z+5$

1. Montrer que si z_0 est une racine de P alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P
2. Vérifier que $-2+\mathrm{i}$ est une racine de P et en déduire une autre racine de P

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

V Module d'un nombre complexe

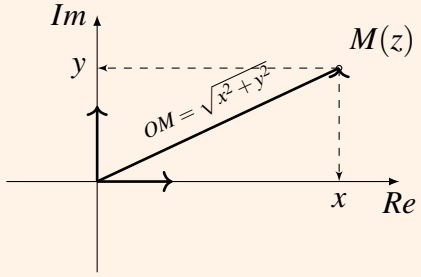
1 Définition et propriétés

D **Définition**

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

La distance $OM = \sqrt{x^2+y^2}$ = s' appelle **me module** de z et se note $|z|$

on a : $|z| = OM = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$



Exemple

• $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ • $|3i| = 3$ • $|-2| = 2$

Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ $(z \neq 0)$
- $|z| \geqslant |\Re e(z)|$
- $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ **Inégalité triangulaire**
- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$
- $|z^n| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{N})$
- $|z| \geqslant |\Im m(z)|$

Application

Calculer le module de chacun des nombre complexes

1. $(2-i)^4$
2. $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i}$
3. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^8$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$,$b = 1 + \mathrm{i}$ et $c = -1 - 3\mathrm{i}$

3 construire le point M' dans le cas ou $z = -2 + \mathrm{i}$

https://steinmath.com better than yesterday, tomorrow better than today

VI Argument et forme trigonométrique d'un complexe non nul

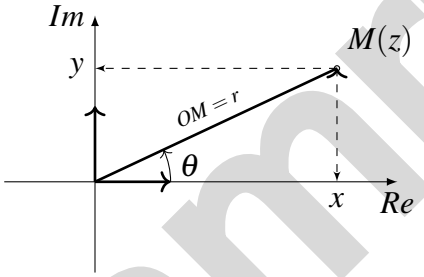
1 Argument d'un complexe non nul

a partir de ce paragraphe le plan complexe est muni du repère o.n.d$(O;\vec{u};\vec{v})$ avec $\vec{u}=\vec{OI}$ et $\vec{v}=\vec{OJ}$

Á tout point $M(x,y)$ du plan distinct de O on fait associer le nombre complexe $z=x+iy$

Soit θ une mesure de l'angle orienté $\vec{u},\overrightarrow{OM})$ $\quad \theta=(\vec{u},\overrightarrow{OM})[2\pi]$

Posons $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Alors $\begin{cases} x=r\cos(\theta) \\ y=r\sin(\theta) \end{cases}$



D Définition

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z=x+iy$, $\quad x\neq 0$ et $y\neq 0$.

On appelle argument de z, noté $arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ et on écrit $\arg(z)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

Exemple

Le plan complexe est rapporté au repère o.n d $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les point A, B, C et D d'affixes respectives $a=2$, $b=2+2i$, $c=-2+2i$ et $d=-i$

$\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)=0\Longrightarrow \arg(2)=0[2\pi]$

$\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{4}\Longrightarrow \arg(2+2i)=\dfrac{\pi}{4}2\pi]$

$\left(\vec{u};\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{3\pi}{4}\Longrightarrow \arg(-2+2i)=\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

$\left(\vec{u};\overrightarrow{OD}\right)=\dfrac{-\pi}{2}\Longrightarrow \arg(-i)=\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$

Conséquences

⋆ Argument d'un nombre réel

- $z\in\mathbb{R}^{*+}\Longleftrightarrow \arg(z)\equiv 0[2\pi]$
- $z\in\mathbb{R}^{*-}\Longleftrightarrow \arg(z)\equiv \pi[2\pi]$

ainsi $z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=0$ ou $\arg(z)\equiv 0[\pi]$

- $\arg(\bar{z})\equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z)\equiv \pi+\arg(z)[2\pi]$

⋆ Argument d'un imaginaire pur

- $z\in i\mathbb{R}^{*+}\Longleftrightarrow \arg(z)\equiv \dfrac{\pi}{2}2\pi]$
- $z\in i\mathbb{R}^{*-}\Longleftrightarrow \arg(z)\equiv \dfrac{-\pi}{2}2\pi]$

ainsi $z\in i\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=0$ ou $\arg(z)\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

D **Définition**

Le plan complexe est rapporté au repère o.n d $(O;\vec{u};\vec{v})$
Soit M un point du plan complexe d'affixe $z \neq 0$
On pose $OM = |z| = r$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$
L'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est appelée **forme trigonométrique** de z

Exemple

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$
On a : $|z| = \sqrt{1+3} = 2$
Donc $z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$
Ainsi $2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$ est une forme trigonométrique de $1 + i\sqrt{3}$

3 Relation entre forme algébrique et forme trigonométrique

Proposition

Soit z un complexe non nul
Si $z = x + iy$ est la forme algébrique de z et $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ une forme trigonométrique de z

Alors $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{\Re e(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{\Im m(z)}{|z|} \end{cases}$

Exemple

- Soit $z = 2 + 2i$, On a : $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

Donc $z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

- soit $z_2 = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$

On a $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$

Exemple

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

- $z_1 = \sqrt{3} + 3i$
- $z_2 = -2 + 2i$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

- $z_3 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$
- $z_4 = -3 - 3i$

4 Propriétés des arguments

Proposition

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$

Conséquences

Notons $r(cos(\theta) + icos(\theta))$ par $[r, \theta]$
Si $z = [r, \theta]\ [2\pi]$ et $z' = [r', \theta']\ [2\pi]$ avec $(r; r') \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ et $(\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$ Alors on a :

- $\overline{z} = [r, -\theta]\ [2\pi]$
- $-z = [r, \pi + \theta]\ [2\pi]$
- $z \times z' = [r \times r', \theta + \theta']\ [2\pi]$
- $\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}, -\theta]\ [2\pi]$
- $\frac{z'}{z} = [\frac{r'}{r}, \theta' - \theta]\ [2\pi]$
- $z^n = [r^n, n\theta]\ [2\pi]$

Application

Écrire sous la forme trigonométrique les nombre complexe suivants

1. $z_1 = (\sqrt{3} - i)^{11}$
2. $z_2 = \frac{1+i}{2i}$
3. $z_3 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 + 2i}$
4. $z_4 = (1 + i\tan(\frac{\pi}{8}))(-1 + i)$

Application

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

1. Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivant
   - iz_1 • $\overline{z_1}$ • $z_1 \times z_2$ • $(z_1 \times z_2)^{12}$
2. Écrire $z_1 \times z_2$ sous la forme algébrique

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 En déduire les lignes trigonométrique de $\frac{\pi}{12}$

5 Interprétation géométrique de l'argument

Propriété

Soit A, B, C, et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D

- $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Application

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisants la condition

- $\arg(z-1-2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$
- $\arg(\mathrm{i}z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$
- $\arg(\frac{z-1+2\mathrm{i}}{z+1}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Conséquences

- trois points distincts A, B, et C sont alignés $\iff (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0[\pi] \iff \arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = 0[\pi]$
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\iff (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 0[\pi] \iff (\arg\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}) = 0[\pi]$
- les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires $\iff (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff (\arg\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Application

A, B, C trois point d'affixe respectives $z_A = 2\mathrm{i}$, $z_B = 2+\mathrm{i}$, $z_C = 1-\mathrm{i}$

1 Écrire le complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ sous la forme trigonométrique et algébrique

2 En déduire la nature du triangle ABC

Application

A, B, C trois point d'affixe respectives $z_A = 1+\mathrm{i}$, $z_B = 3+5\mathrm{i}$, $z_C = 2+2\sqrt{3}+\mathrm{i}(3-\sqrt{3})$

1 calculer AB et AC, en déduire la nature de ABC

2 Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 En déduire que ABC est un triangle équilatérale

VII Forme exponentielle d'un nombre complexe

1 Définition

D **Définition**

Le nombre complexe de module 1 et d'argument θ sera noté $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

Exemple

- ◯ $e^{i\pi} = -1$
- ◯ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

2 Cas générale

Nous avons vu que tous nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = |z|(cos(\theta) + isin(\theta))$

D **Définition**

$z = re^{i\theta}$. est une forme exponentielle d'un complexe de module r et dont θ est un argument :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(cos(\theta) + isin(\theta))$$

3 Opérations sur les forme exponentielles

T **Théorème**

Soient r et r' deux réels strictement positives et θ et θ' deux réels

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

1. Déterminer le module et un argument de $z_1 = -2\mathrm{i}$, $z_2 = 1+\mathrm{i}$, $z_3 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$ $z_4 = -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$
2. Déterminer une forme exponentielle de z_1, z_2, z_3, z_4, $z_2^2 z_3$, $z_1 z_4$, $\dfrac{z_3}{z_2}$,
3. Montrer que z_3^{2019} est un imaginaire pur

4 Formule de Moivre

T **Théorème**

Pour tout réel θ et pour tout entier naturel n,on a : $(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)$
Elle s'écrit aussi $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{ni\theta}$

Application

Déterminer $cos(2x)$ et $cos(3x)$ en fonction de $cos(x)$

5 Les deux formules d'Euler

T **Théorème**

Pour tout réel θ

■ $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ ■ $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

Application

Montrer que ■ $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et

■ $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y)$ et que ■ $\sin^3(x) = \dfrac{3\sin(x)-\sin(3x)}{4}$

Application

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$
2. En déduire une forme trigonométrique du complexe $z = 2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$
3. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

VIII Les équations du seconde degrés à coefficient réels

On appelle équation du seconde dégrée è coefficient réels toute équation de la forme $az^2+bz+c=0$ ou $a \in \mathbb{R}^*, (b,c) \in \mathbb{R}^2$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1 Résolution de l'équation $z^2 = \delta$

Proposition

Soit δ un réel
- si $\delta \geqslant 0$ alors $z^2 = \delta \iff z = \pm\sqrt{\delta}$
- si $\delta < 0$ alors $z^2 = \delta \iff z = \pm i\sqrt{|\delta|}$

Exemple

- $z^2 = -4 \iff z = 2i$ ou $z = -2i$
- $z^2 = -3 \iff z = i\sqrt{3}$ ou $z = -i\sqrt{3}$

2 Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ou a, b et c sont des réels

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

On a $az^2 + bz + c = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

on conclut que :

T Théorème

- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$: $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions conjugués $\mathbb{C}$: $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Remarque

- toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c$ se factorise dans $\mathbb{C}$ et $Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
- $Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = a(z - Sz + P)$
  $S = z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $P = z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

Application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équation suivantes
- $2z^2 + z + 3 = 0$
- $2z^2 + 6z + 5 = 0$
- $z^2 + z + 2 = 0$

Yassine Elamri

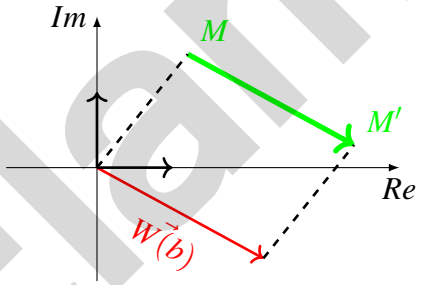
Today better than yesterday, tomorrow better than today

- $z^2-6z+13=0$
- $(z+\mathrm{i})^2+(z+\mathrm{i})+2=0$
- $((-\mathrm{i}z+3+3\mathrm{i})^2-2(-\mathrm{i}z+3+3\mathrm{i})+2=0$

IX Écritures complexes de transformations

1 Écriture complexe d'une translation

soit t la translation de vecteur $\vec{W}$ d'affixe b et $M(z)$ un point du plan complexe
$M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation t.
Donc :$M\vec{M}'=\vec{W}\iff z'-z=b$



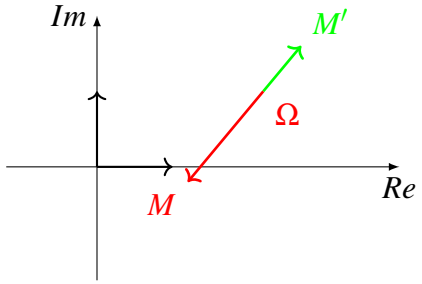
T **Théorème**

$\vec{W}$ un vecteur d'affixe b On a équivalence :

1. t la translation de vecteur $\vec{W}$ d'affixe b
2. l'écriture complexe de t est $z'=z+a$

2 Écriture complexe d'une homothétie

soit Ω un point d'affixe ω et k un **réel non nul** h **l'homothétie de centre** Ω **de rapport** k
$M'(z')$ **l'image de** $M(z)$ **par l'homothétie** h**.**
Donc :$\Omega\vec{M}'=k\Omega\vec{M}\iff z'-\omega=k(z-\omega))$



T **Théorème**

Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul On a équivalence :

1. h l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ de rapport k
2. l'écriture complexe de h est $z'-\omega=k(z-\omega)$

Remarque

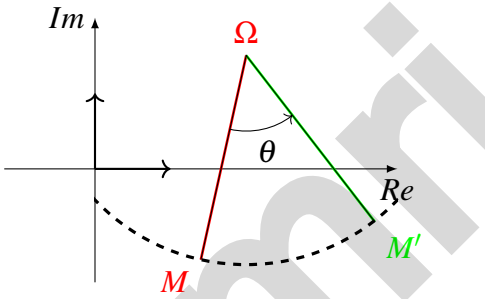
- $h(\Omega)=\Omega$. Ω est l'unique point invariant par $h_{(\Omega,k)}$ $(k\neq 1)$
- si $k=-1$ alors h est la symétrie centrale de centre Ω

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Écriture complexe d'une rotation

soit Ω un point d'affixe ω et θ un réel. r la rotaion de centre Ω et d'angle θ
$M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation r.



$$\text{Donc : } r(M)=M' \iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|}=1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\theta[2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\theta}$$
$$\iff z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$

T Théorème

Ω un point d'affixe ω et θ un réel . On a équivalence :

1. r est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ
2. l'écriture complexe de r est $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

Remarque

- si $\theta=0$ alors $r(M)=M$ pour tout point M du plan
- si $\theta=\pi$ alors $r=s_\Omega$
- $r(\Omega)=\Omega$. Ω est l'unique point invariant par $r_{(\Omega,\theta)}$ $(\theta\neq 0)$

Application

1. Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$
2. Déterminer l'écriture complexe de la translation qui transforme $A(2-3i)$ en $B(4+5i$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today