Chapitre

Logarithme décimal

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On utilise les nombres 10^n où $n \in \mathbb{Z}$, puis on admet l'élargissement à $\mathbb{R}_+^*$.**	• **Simplifier des expressions qui contiennent des logarithmes décimaux.** • **Résoudre des équations logarithmiques simples.** • **On utilise la calculatrice pour calculer des valeurs approchées du logarithme décimal dun nombre réel strictement positif ou de déterminer une approximation dun nombre dont son logarithme décimal est connu.**

Les prés-requis	Les extensions
- Ordre et opérations. - Equations et inéquations. - Puissance et opérations.	- Les fonctions Logarithmiques et Exponentielles. - Eqtions et Inéquations Logarithméiques. - Optique et Atomistique.

Yassine Elamri

I Logarithme Décimal

1 Notion de logarithme décimal

Définition

Pour tout réel x strictement positive (de $\mathbb{R}_+^*$), il existe un et un seul réel y tel que : $10^y = x$. On note : $\log(x)$ ou bien $\log_{10}(x)$.

On écrit : $10^y = x \iff \log(x) = y$.

$\log_{10}$: est la fonction Logarithme décimal (de base 10) de x.

• Exemple

- $\log_{10}(1) = y \iff 10^y = 1 \iff y = 0 \iff \log(1) = 0$.
- $\log_{10}(10) = y \iff 10^y = 10 \iff y = 1 \iff \log(10) = 1$.
- $\log_{10}(100) = 2 \iff \log\left(10^2\right) = 2$.
- $\log_{10}(1000) = \log\left(10^3\right) = 3$.

Remarque

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ;\ \log_{10}\left(10^n\right) = n.$$

2 Propriétés

Propriété

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

- $\log(x \times y) = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\log(y)$
- $\log\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{2}.\log(x)$
- $\log(x) = \log(y) \iff x = y$
- $\log(x) < \log(y) \iff x < y$
- $\log\left(x^n\right) = n.\log(x)$
- $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log\left(x^y\right) = y.\log(x)$
- $\log(x) \geqslant \log(y) \iff x \geqslant y$

• Exemple

- $\log(30) = \log(3 \times 10) = \log(3) + \log(10) = 1 + \log(3)$. de même $\log(30) = \log(6 \times 5) = \log(6) + \log(5)$
- $\log\left(\dfrac{1}{10}\right) = -\log(10) = -1$.
- $\log\left(\dfrac{4}{3}\right) = \log(4) - \log(3)$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

⊛ $\log\left(\sqrt{10}\right) = \frac{1}{2}.\log(10) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

⊛ **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $\log(x+1) - \log(2x) = 0$ **.**

Cette équation est définie si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x+1 > 0$ et $2x > 0$.

$\iff x > -1$ et $x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; on a : $\log(x+1) - \log(2x) = 0$

$\iff \log(x+1) = \log(2x)$

$\iff x+1 = 2x$

$\iff x - 2x = -1$

$\iff -x = -1$

$\iff x = 1$

$\iff S_E = \{1\}$

⊛ **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :** $2\log(x) - \log(2x) \geqslant 0$ **.**

Cette équation est définie si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x > 0$ et $2x > 0$.

$\iff x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; on a : $2\log(x) - \log(2x) \geqslant 0$

$\iff 2\log(x) \geqslant \log(2x)$

$\iff \log\left(x^2\right) \geqslant \log(2x)$

$\iff x^2 \geqslant 2x$

$\iff x^2 - 2x \geqslant 0$

$\iff x(x-2) \geqslant 0$

On a : $x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

Tableau de signe de $x(x-2)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\iff S_I = [2; +\infty[$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today