Chapitre

Limite d'une fonction

Cours 1BSX

Contenus de programme	Capacités attendues
- Limites des fonctions de référence ; - Limite finie et Limite infinie en un point ; - Limite finie et Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$; - Opérations sur les limites ; -Limite à gauche ; limite à droite ; -Limites de fonctions polynomiales ; rationnelles et limites de $\sqrt{f}$, f étant une fonction usuelle ; - Limites et Ordre ; -limites remarquables des fonctions trigonométriques .	- Calcul les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ; -Calculer les limites des fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles.

Recommandations pédagogiques

- On approchera la notion de limite dune manière intuitive à partir du ń comportement ż de fonctions de référence qui figurent au programme et leurs inverses au voisinage de 0 , de $+\infty$ et de $-\infty$,et on admettra ces limites ;
- On se basera sur les propriétés de lordre dans IR pour calculer les limites de fonctions simples vérifiant :
$|f(x)-l| \leq u(x)$ où u est une fonction dont la limite est 0 ;
$f(x) \geq u(x)$ où u est une fonction dont la limite est $+\infty$;
$f(x) \leq u(x)$ où u est une fonction dont la limite est $-\infty$;
-On admettra les opérations sur les limites finies ou infinies, toutefois on devra habituer les élèves à les utiliser correctement ;
-on habituera les élèves à lever les indéterminations simples ;
-Toute présentation théorique de la notion de limite est hors programme.

Yassine Elamri

Activité

Partie : 1

la figure ci-dessous représente la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, dans un plan muni d'un repère $\left(o; \vec{i}; \vec{j}\right)$

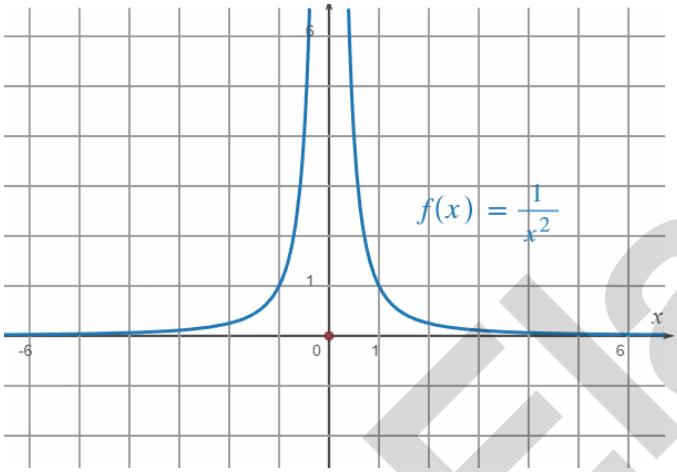


FIGURE 1.1 – courbe de f

1 la limite de f au voisinage de 0

a)Recopier et compléter le tableau suivant

x	0,2	0,1	0.01	10^{-6}	10^{-30}	-0,1	-0.001	-10^{-7}	-10^{-10}	-10^{-50}
$f(x)$										

b) En saidant de la courbe ou du tableau que peut-on remarquer aux valeurs de $f(x)$ quand la variable x prend des valeurs proches (voisines) de 0.

2 la limite de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

a)Recopier et compléter le tableau suivant

x	6	10	12	23	98	100	1000	10^4
$f(x)$								

b) Que peut-on remarquer aux valeurs de f(x) quand x prend des valeurs positives et grandes

c) Conclusion :

- Si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$; on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est 0. et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Partie : 2

La figure ci-dessous représente la courbe de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$, dans un plan muni d'un repère $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

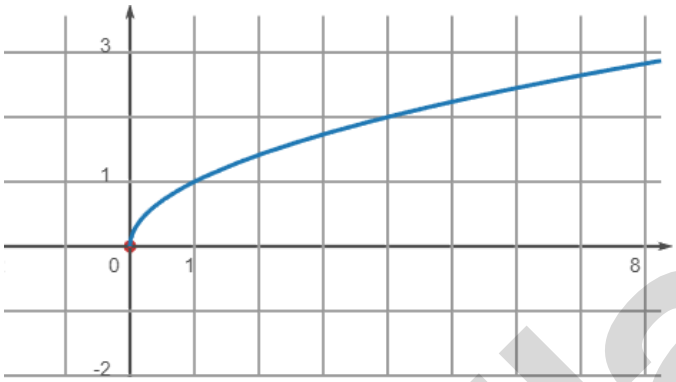


FIGURE 1.2 – courbe de g

1. En s'aidant de la courbe de g que peut-on remarquer aux valeurs de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
2. En s'aidant de la courbe de g que peut-on remarquer aux valeurs de $g(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus proche de 0 ?
3. Exprimer vos remarque en utilisant le symbole *lim*.

I Limite infinie et limite finie dune fonction au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

1 Limite infinie dune fonction au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ tel que $a \in \mathbb{R}$.

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et se lit la limite de la fonction f si x tend vers $+\infty$ est $+\infty$.

On définit de même les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limites usuelles :

On admet les limites suivantes :

Yassine Elamri

- $\lim\limits_{+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{+\infty}x^3=+\infty$
- $\lim\limits_{+\infty}x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{+\infty}x=+\infty$
- $\lim\limits_{+\infty}x^n=+\infty$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{-\infty}x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{-\infty}x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{-\infty}x=-\infty$

- Si n est pair et différent de 0, alors $\lim\limits_{-\infty}x^n=+\infty$
- Si n est impair et différent de 0, alors $\lim\limits_{-\infty}x^n=-\infty$

Propriété

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{R}^*$, On admet les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}kx^n=\begin{cases}+\infty\ ;k>0\\-\infty;\ k<0\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}kx^n=\begin{cases}+\infty\ ;k>0\ et\ n\ pair\\-\infty;\ k<0\ et\ n\ pair\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}kx^n=\begin{cases}-\infty\ ;k>0\ et\ n\ impair\\+\infty;\ k<0\ et\ n\ impair\end{cases}$

• Exemple

Calculons les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}5x^4$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^{15}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}6x^8$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}-9x^5$

2 Limite finie dune fonction au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ tel que $a\in\mathbb{R}$ et soit l un reél .

  Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ ou $\lim\limits_{+\infty}f=l$.
- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;b]$ tel que $b\in\mathbb{R}$ et soit l' un reél .

  Si $f(x)$ tend vers l' quand x tend vers $-\infty$ alors on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l'$ ou $\lim\limits_{-\infty}f=l'$.

Limites usuelles :

On admet les limites suivantes :

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0, n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0, n\in\mathbb{N}^*$

Propriété

Soit f une fonction numérique et l un nombre réel.

- Si f admet une limite l en $+\infty$ ou en $-\infty$ alors cette limite et unique.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ équivalent à $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-l)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$ équivalent à $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-l)=0$

• Exemple

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3$

II Limite infinie et limite finie dune fonction en un point

1 Limite finie dune fonction en un point

Définition

Soit a et l deux nombres réels. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-x_0;a+x_0[-\{a\}$ où $a\in\mathbb{R}$.

Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, on écrit : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ ou $\lim\limits_{a}f=l$.

Propriété

Soit f une fonction numérique, a et l deux nombres réels ;

Si f admet une limite l en a alors cette limite est unique.

Limites usuelles :

On admet les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to0}x=0$
- $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$
- $\lim\limits_{x\to0}x^3=0$
- $(\forall n\in\mathbb{N}^*), \lim\limits_{x\to0}x^n=0$

Yassine Elamri

2 Limite infinie dune fonction en un point

Propriété

Soit f une fonction numérique, a un nombres réel.

- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a, on écrit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

III Limite à gauche et limite à droite dune fonction en un point

Définition

Soit f une fonction numérique, et a un nombre réel.

- La limite de f à droite en a , notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, est la limite de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches et supérieures de a.
- La limite de f à gauche en a , notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, est la limite de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches et inférieures de a.

Limites usuelles :

On admet les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Si n est pair et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Si n est impair et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

• Exemple

Calculons $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$

on a $\lim\limits_{x\to 1^+} x - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Yassine Elamri

Théorème

Soit f une fonction numérique. On a :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l$$

Remarque

- Le théorème reste valable si l est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l'$ tel que $l \neq l'$ on dit que f na pas de limite en a.

Exemple

On considère la fonction f défine par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x};\ x \geq 0 \\ f(x) = x^3;\ x < 0 \end{cases}$

- Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
- On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

IV Opérations sur les limites

Dans cette paragraphe l et l' désignent des nombres réels et a désigne un réel ou $\pm\infty$. Ces opérations réstent valables pour les limites à droite et à gauche en a

Yassine Elamri

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
l	$l'\neq 0$	$l+l'$	ll'	$\frac{l}{l'}$
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I$	$-\infty$	$F.I$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I$	0
0	0	0	0	$F.I$
$l\neq 0$	0	l	0	$\pm\infty$

- F.I désigne forme indéterminée.
- Les formes indéterminées sont : $\frac{0}{0}$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $0\times(\pm\infty)$; *et* $(+\infty)+(-\infty)$.

V Limite dune fonction polynôme Limite dune fonction rationnelle

1 Limite dune fonction polynôme

Propriété

Soit f une fonction polynôme et a un nombre réel.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- La limite dune fonction polynôme au voisinage de $\pm\infty$ est la limite du monôme le plus dominant (de plus haut degré).

• Exemple

- $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4x+3=2^2-4\times 2+3=-1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3-x+7=\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{3}\right)x^5-x^3+7x-2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{3}\right)x^5=-\infty$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3}x^2-3x^4+x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2}-1\right)x^3 \quad -$ $2x+4$
- $\lim\limits_{x\to-1} x^3-2x^2+4x-1$

2 Limite dune fonction rationnelle

Propriété

Soit f une fonction polynôme et a un nombre réel.

- Si $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{P(a)}{Q(a)}$
- La limite dune fonction rationnelle au voisinage de $\pm\infty$ cest la limite du quotient de termes les plus dominant (plus haut degré au numérateur et plus haut degré au dénominateur).

• Exemple

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{3x^3-1}=\frac{0}{2}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+5}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3}x^4-x^2+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3}x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3}x=-\infty$

Application

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{x^2-x-1}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-x+1}{x^2-x^3-6}$
- $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$
- $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^3-5x-22}{x^2-x-2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

VI limite d'une fonction irrationnelle

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$, telle que $(\forall x \in [a;+\infty[;\ f(x) \geq 0)$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $l \geq 0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Remarque

Cette propriété reste valable aussi quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a ou à droite en a ou à gauche en a.

Application

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+1}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x\sqrt{2x-1}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^4-x+5}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

VII limite d'une fonction trigonométrique

Propriété

- $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$; si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Exemple

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to\pi} \cos(x) = -1$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Yassine Elamri

Remarque

- Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ nont pas de limite en $\pm\infty$.
- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \tan(x) = -\infty$

Propriété

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $(\forall a \in \mathbb{R}^*) ; \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

Application

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\tan x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)+\tan(x)}{x^3}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x\sin(2x)}$
- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

VIII Limites et ordre

Propriété

Soit a et l deux réels et $I=[a;+\infty[$.Soit f,g et h des fonctions numériques définies sur I.

- Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,;\ g(x)\leq f(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,;\ g(x)\geq f(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty\end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,;\ |f(x)-l|\leq g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0\end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$
- Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,;\ g(x)\leq f(x)\leq h(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l\end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

Remarque

Ces propriétés restent valables aussi quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a ou à droite en a ou à gauche en a.

Exemple

Soit f une fonction numérique à variable réelle telle que : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

- Vérifions que $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;\ |f(x)-1|<\frac{1}{\sqrt{x}}$
- On en déduit la limite de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Application

1 a- Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\ \frac{1}{3}\leq\frac{1}{2-\cos x}\leq 1$

b- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\cos x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2-\cos x}$

2 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2+\cos x}{1+\sqrt{x}}$

a- Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\,;|f(x)|\leq\frac{3}{\sqrt{x}}$

b- Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Yassine Elamri