Fonctions exponentielles

I Fonctions exponentielles népérienne

1 Définition et propriétés

Activité

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que : $(\forall a,b\in\mathbb{R}) : f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)\times f^{-1}(b)$.
3. Vérifier que $f^{-1}(0)=1$
4. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}\,;\, f^{-1}(x)>0$

D — **Définition**

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée *exp* la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln sur $]0,+\infty[$

Propriété

- $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,\ln(\exp(x))=x$
- $(\forall x\in]0,+\infty[)\,;\,\exp(\ln(x))=x$
- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in]0;+\infty[)\,;\,\exp(x)=y\Leftrightarrow x=\ln(y)$
- $(\forall x\in\mathbb{R})\,;\,\exp(x)>0$
- $\exp(0)=1$
- $\exp(1)=e$

Remarque

Les fonctions ln et *exp* sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

Propriété

La fonction exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on a :

- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in]0;+\infty[)\,;\,\exp(x)=\exp(y)\Leftrightarrow x=y$
- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in]0;+\infty[)\,;\,\exp(x)\leq\exp(y)\Leftrightarrow x\leq y$

Yassine Elamri

2 Écriture e^x

Propriété

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}); \exp(rx) = \exp(x)^r$$

• Preuve

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q}); \ln\left(\exp(x)^r\right) &= r\ln(\exp(x)) \\ &= rx \\ &= \ln(\exp(rx))\end{aligned}$$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \exp(rx) = \exp(x)^r$

Résultat

- $(\forall r \in \mathbb{Q})\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r$
- On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, (\exp(x) = (\exp(1))^x = e^x$

Propriété

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

1. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
3. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^{-y}}$
4. $e^{rx} = (e^x)^r\,;\, (r \in \mathbb{Q})$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \ln(e^x) = x$
6. $(\forall x \in]0;+\infty[); e^{\ln x} = x$
7. $(\forall x \in \mathbb{R})((\forall y \in]0;+\infty[)\,;\, e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$
8. $(\forall x \in \mathbb{R}); e^x > 0$
9. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Application

1. Simplifier les expressions suivantes :
   - $A = e^{2+\ln 8}$
   - $B = \frac{e^2}{e^{1+\ln 2}}$
   - $C = \frac{e^{4x}}{(e^x)^2 \times e}$
   - $D = (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Montrer que :

- $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- $e^x - \frac{e^x}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1) : e^{x+3} = e^4$
- $(E_2) : e^{2x} - e^x - 2 = 0$
- $(E_3) : e^{-x} + e^x = 1$
- $(E_4) : \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^{-x}+1}$
- $(E_5) : \frac{e^x}{e^x-11} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^{-x}+e^x}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{2x} - e^x \geq 2$

3 Limites usuelles

Propriété

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0\,;\ (n \in \mathbb{N}^*)$

4- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

5- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

6- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0\,;\ (n \in \mathbb{N}^*)$

7- $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

• Preuve

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ e^x > x$

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ e^x \geq \frac{x^2}{2}$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$

4- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 0$

5- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{\frac{e^{-x}}{-x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-1}{\frac{e^t}{t}} = 0$

6- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \left(n.\frac{x}{n}e^{\frac{x}{n}}\right)^n = 0$ 7- Le dérivabilité de exp en 0

Application

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} (2e^x - 3x)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-3x)$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+1\right)e^x$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-3}{2e^x+2}$

6 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

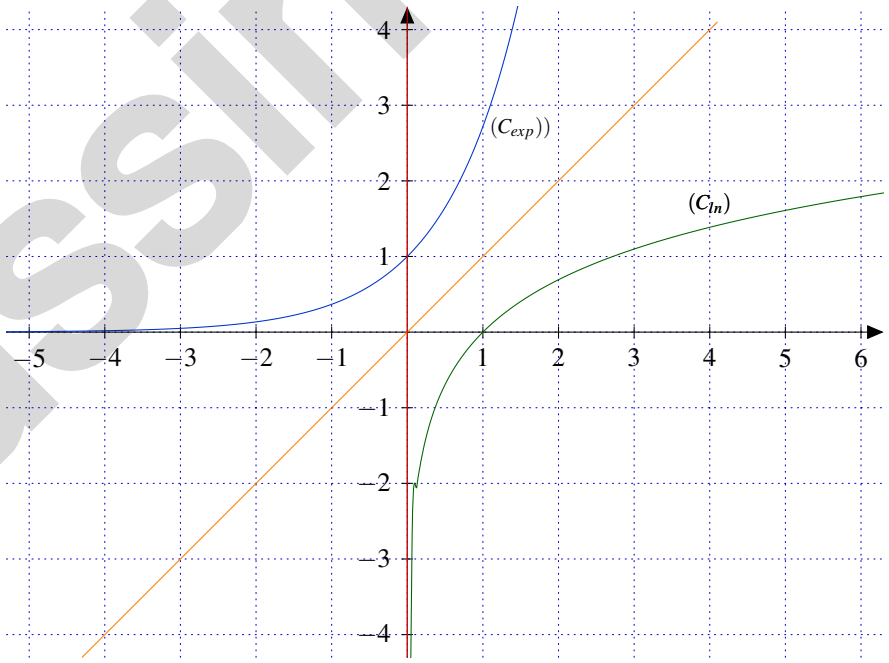
7 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x--2x-1}{x^2}$

4 Courbe représentative de la fonction exponentielle

On a vu que la fonction exponentielle népérienne et la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, donc la courbe de la fonction exp notée $(C_{\exp})$ et la courbe de la fonction In notée $(C_{\ln})$ sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation $y=x$, bien entendu, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp	0	$\nearrow$	e	$\nearrow$ $+\infty$

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques des deux fonctions :



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Dérivée de la fonction exponentielle

Activité

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$, et f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ par : $f^{-1}(x)=e^x$

1. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $f^{-1}(x)$;pour tout $x\in\mathbb{R}$
3. Soit u une fonction définie sur l'intervalle$I$
   a. Montrer que la fonction $h: x\to e^{u(x)}$ est dérivable sur I
   b. Calculer $h'(x)$; pour tout $x\in I$

Propriété

La fonction $x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\forall x\in\mathbb{R}):(e^x)'=e^x$

Corolaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors : $x\mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(\forall x\in\mathbb{R})$: $\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$

Exemple

La fonction f définie par $f(x)=(e^x-3)(e^x+2)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme étant produit de fonctions dérivables), et on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R}); f'(x)&=[(e^x-3)(e^x+2)]'\\&=(e^x-3)'(e^x+2)+(e^x-3)(e^x+2)'\\&=e^x(e^x+2)+e^x(e^x-3)\\&=e^{2x}+2e^x+e^{2x}-3e^x\\&=2e^{2x}-e^x\end{aligned}$$

Remarque

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les primitives sur I de la fonction $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x\mapsto e^{u(x)}+k$ où $k\in\mathbb{R}$.

Exemple

Déterminons les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :
1. $x\mapsto e^{-5x}$
2. $x\mapsto xe^{x^2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Soient g_n une fonction définie sur $[0,+\infty$ par : $\begin{cases} g_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} & x \neq 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$, et (C_{g_n}) sa courbe représentatif dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1 a Montre que g_n est continue à droite de 0

b Étudier la dérivabilité de g_n à droite de 0

2 a Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$

b Calculer $g_n'(x)$ pour tot $x \in \mathbb{R}^+$, puis dresser le tableau de variations de g_n

3 On pose $h(t) = e^{-t} - (1-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

a Étudier les variations de h

b En déduire que : $(\forall t \in [0,+\infty[) \quad 0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$

c Montrer que : $(\forall x \geq 0)\ 0 \leq e^{-x} - (1-x) \leq \frac{x^2}{2}$

4 a Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall x > 0)\ 0 \leq g_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$

b Étudier la branche parabolique de (C_{g_n}) en $+\infty$

c Étudier la position relative de (C_{g_n}) et l'asymptote oblique

5 Tracer la courbe (C_{g_1}) dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

III Exponentielle de base a

1 Définition et résultats

Théorème et Définition

Soit a un réel strictement positif.
La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R} = \log(]0,+\infty[)$ vers $]0,+\infty[$.
Cette fonction réciproque s'appelle fonction exponentielle de base a, se note $\exp_a$

Résultats immédiats :
Soit > 0 et $aa \neq 1$

- La fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \exp_a(x) > 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0,+\infty[)\,;\, \exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \log_a(\exp_a(x)) = x$
- $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \exp_a(\log_a(x)) = x$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Écriture $e^{x\ln(a)}$

Propriété

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\exp_a)(x) = e^{x\ln(a)}$

• Preuve

Posons : $y = \exp(x)$ on a donc $y > 0$ et $x = \log_a(y) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ D'où : $\ln(y) = x\ln(a)$; finalement $y = e^{x\ln(a)}$ d'où la propriété

Propriété

La fonction $x \to \exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})$ on a : $(\exp(x))' = \ln(a)e^{x\ln(a)}$

3 Monotonie et représentation

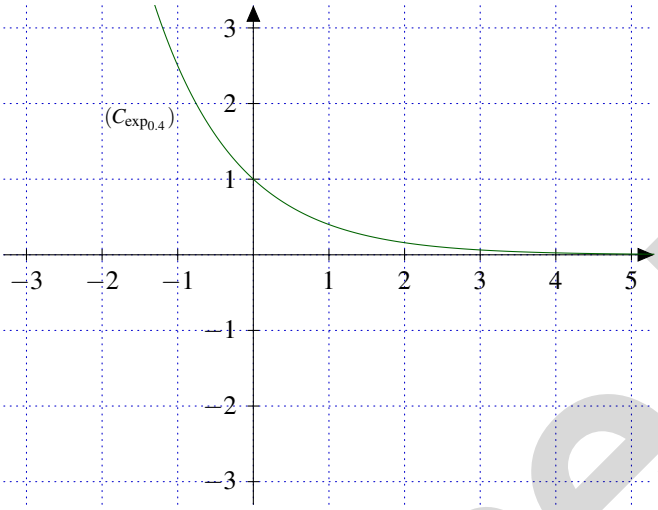
Soit a un réel strictement positif et différents de 1
On considère la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_a(x) = \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$
La fonction $f_a$est dérivable sur $\mathbb{R}$ Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,; f'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)}$
Donc le signe de $f'_a(x)$ est le signe de $\ln(a)$ car : $(\forall x \in \mathbb{R})\,; e^{x\ln(a)} > 0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

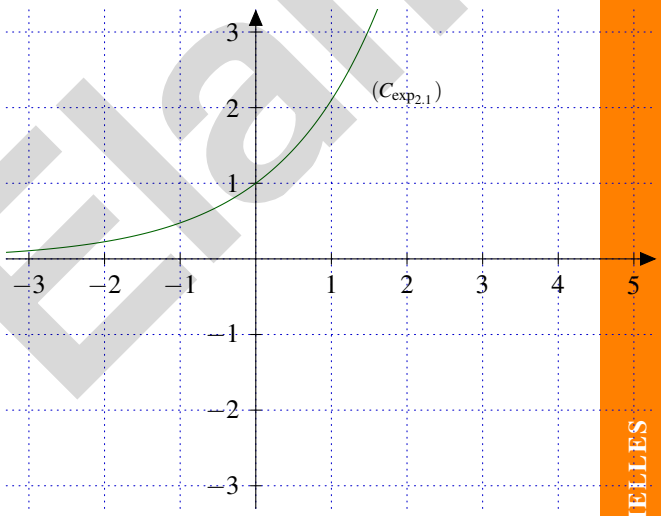
Si $a \in]0,1[$ alors $\ln(a) < 0$
Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f'_a(x) < 0,$
Alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\ln(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$



Si $a \in]1,+\infty$ alors $\ln(a) > 0$
Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f'(x) > 0,$
Alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$



Propriété

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a :

- $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\,;\ \exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$
- $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\,;\ \exp_a(x-y) = \frac{x}{\exp_a(y)}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\ (\exp_a(x))^r = \exp_a(rx)$

Preuve

utiliser l'écriture $e^{x\ln(a)}$

4 Les puissances réelles

a Rappelle

- Puissance entier

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a :
$x^n = \underbrace{x \times x \times .... \times x}_{n \text{ fois}}$ et $x^0 = 1$ si $x \neq 0$

- Puissance relatif

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

- Puissance rationnelle

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall r \in \mathbb{Q}^*) ; r = \frac{p}{q}$ $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$

b puissances réelles : Notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $a^x = 1$
- Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x\ln(a)}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2023/2024
Pr : .....

Série 07
Fonction exponentielle

Classe :
Lycée : .....

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today