Chapitre

La dérivation

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
► Nombre dérivé dune fonction en un point x_0 ; interprétation géométrique du nombre dérivé ; droite tangente à une courbe en un point ; ► Équation cartésienne de la droite tangente ; ► Dérivabilité sur un intervalle ; fonction dérivée ; ► Dérivation des fonctions : $x \to a$, $x \to ax$ et nx^n ; ► Dérivation des fonctions : $f \to g$, f', fg, f'', f/g et $(f^n)'$ (n entier) ; ► Monotonie dune fonction et signe de sa dérivée ; extrémums dune fonction dérivable sur un intervalle. ► Reconnaitre que le nombre dérivé dune fonction en $0x$ est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point dabscisse ox ;	► Reconnaitre la dérivabilité des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ; ► Déterminer léquation de la tangente à une courbe en un point donné et la construire ; ► Déterminer la monotonie dune fonction à partir de létude du signe de sa dérivée ; ► Résoudre des problèmes dapplication sur les valeurs minimales et les valeurs maximales ; ► Déterminer le signe dune fonction à partir de son tableau de variations ou de sa représentation graphique.

Yassine Elamri

I Le nombre dérivé en un point

1 Activité et définition

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x+2$

1. Calculer : $f(1)$
2. Déterminer : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Solution :

1. on a : $f(1) = 3\times 1+2 = 3+2 = 5$
2. $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{3x+2-5}{x-1} = \dfrac{3x-3}{x-1} = \dfrac{3(x-1)}{x-1} = 3$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x-1)}{x-1} = 3$

Définition

Soit f une fonction et $a \in D_f$: On dit que la fonction f est dérivable en le nombre : a si la limite : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie. cette limite s'appelle Le nombre dérivé de la fonction f en a on le note par : $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point a : L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse a est : $(T) : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

• Exemple

Par exemple $a = 1$: alors l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est : $(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$ Exemple 7.1 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$ Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 : - Premièrement : Calculons : $f(1)$ et $f'(1)$: on a : $f(1) = 1^2 = 1$ et

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

- Deuxièmement : L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est : $(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$ c'est à dire : $(T) : y = 2(x-1)+1$ c'est à dire : $(T) : y = 2x-1$ La construction de la courbe s'il est demandé :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en le point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. $f(x)=x^2+x;\quad a=0$
2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+1;\quad a=0$
3. $f(x)=\frac{x}{x-1};\quad a=2$

Solution :

1. on a : $f(x)=x^2+x$ donc : $f(0)=0$ et :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}x+1=0+1=1$$

L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :
$(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ c'est à dire : $(T):y=1(x-0)+0$ c'est à dire : $(T):y=x$

II Les opérations sur les fonctions dérivées

1 La fonction dérivée

Définition

On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tous les points de I. et la fonction définie par :

$$f':I\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f'(x)$$

s'appelle la dérivée de la fonction f sur I on le note par f'.

2 La dérivation de quelques fonctions usuelles

Soient a et b deux nombres réelles :

La fonction $x\mapsto f(x)$	La fonction $x\mapsto f'(x)$	L'ensemble de définition D_f
La fonction constante $x\mapsto f(x)=a$ avec $(a\in\mathbb{R})$	La fonction nulle $x\mapsto f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=ax$ avec $(a\in\mathbb{R})$	$x\mapsto f'(x)=a$ avec $(a\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f'(x)=2x$	$x\mapsto f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=x^n$ avec $(n\in\mathbb{N}^*)$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

1. Si : $f(x) = 3x$ alors : $f'(x) = 3$
2. Si : $f(x) = 4x + 1$ alors : $f'(x) = 4$
3. Si : $f(x) = 5$ alors : $f'(x) = 0$
4. Si : $f(x) = x^4$ alors : $f'(x) = 4x^3$
5. Si : $f(x) = x^5$ alors : $f'(x) = 5x^4$
6. Si : $f(x) = x$ alors : $f'(x) = 1$

3 Les opérations sur les fonctions dérivables

Ce tableau récapitule différentes opérations sur les fonctions et leurs dérivées respectives. Par exemple, si vous avez deux fonctions f et g, la dérivée de leur somme est égale à la somme des dérivées individuelles $(f' + g')$. De même, la dérivée du produit de f(x) et g(x) est donnée par la formule $(f'g + fg')$. Vous trouverez également les dérivées pour d'autres opérations telles que l'inverse, le quotient, le carré et la puissance.

Les opérations	La fonction $x \mapsto f(x)$	La fonction $x \mapsto f'(x)$	La condition
La somme	$f + g$	$(f+g)' = f' + g'$	.....
La multiplication par un nombre	$k \cdot f$ avec $k \in \mathbb{R}$	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	.....
Le produit	$f \times g$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	.....
L'inverse	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$	$f \neq 0$
La quotient	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g \neq 0$
Le carré	f^2	$(f^2)' = 2 \cdot f' \cdot f$	.....
La puissance	f^n	$(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$	.....

4 Les variations dune fonction et le signe de la dérivée

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :
Si la dérivée f' est positive sur I, alors la fonction f est croissante sur I.
Si la dérivée f' est négative sur I, alors la fonction f est décroissante sur I.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :
Si la dérivée f' est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I. Si la dérivée f' est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :
Si la dérivée f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante sur I.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Considérons la fonction $f(x) = x^2$.
- Le signe de la dérivée de $f(x)$: La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = 2x$. Elle est positive pour tout $x > 0$ et négative pour tout $x < 0$.
⋆ Conclusion : La fonction $f(x)$ est croissante sur $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

• Exemple

Considérons la fonction $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.
- Le signe de la dérivée de $g(x)$: La dérivée de $g(x)$ est $g'(x) = -9x^2 + 4x - 5$. Elle est positive pour certains intervalles et négative pour d'autres, dépendant des solutions de $g'(x) = 0$. Par exemple, $g'(x) > 0$ pour $x < -1$ et $x > \frac{5}{9}$, et $g'(x) < 0$ pour $-1 < x < \frac{5}{9}$.
⋆ Conclusion : La fonction g est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, et croissante sur $[-1, 1]$. Elle est concave vers le bas sur certains intervalles et concave vers le haut sur d'autres.

Application

Considérons la fonction $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.
a) Déterminez les intervalles où la fonction $f(x)$ est croissante et décroissante.
b) Calculez la dérivée $f'(x)$ et étudiez le signe de $f'(x)$.
c) Déterminez les intervalles où la fonction $f(x)$ est concave vers le haut et concave vers le bas.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today