Triangle et droites parallèles

I La droite passante par les milieux de deux cotés d'un triangle

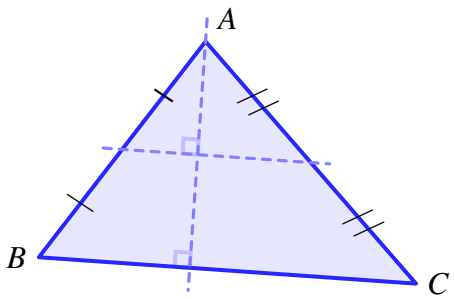
Activité

Soit ABC un triangle
Soient E et F les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$

1. Produire une figure
2. Construire le point D symétrique de E par rapport à F
3. Montrer que $AECD$ est un parallélogramme
4. En déduire que $CD = AE = EB$
5. Montrer que $BCDE$ est un parallélogramme
6. En déduire que $(EF) \parallel (BC)$ et $EF = \frac{1}{2}BC$

• Exemple

Soit ABC un triangle et I et J les milieux respectifs des cotés $[AB]$ et $[AC]$
On remarque que $(IJ) \parallel (BC)$ grace à la droite auxiliaire et on a $IJ = \frac{1}{2}BC$



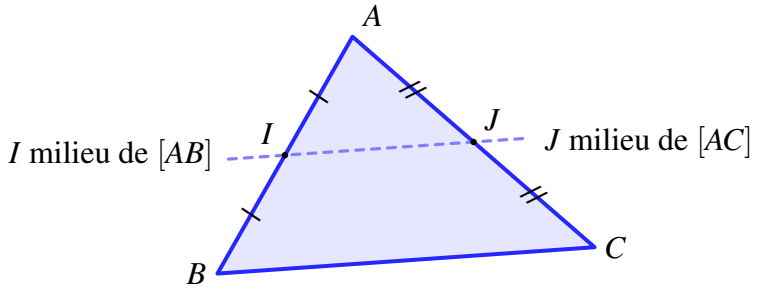
Propriété

La droite passante par les milieux de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième coté
Autrement dit :
Soit ABC est un triangle
Si $\begin{cases} I \text{ milieu de } [AB] \\ J \text{ milieu de } [AC] \end{cases}$ alors $(IJ) \parallel (BC)$

⚠ ✯ Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle et deux milieux de deux cotés
✯ On utilise cette propriété pour montrer que deux droites sont parallèles

✿ Figure géométrique :

Yassine Elamri



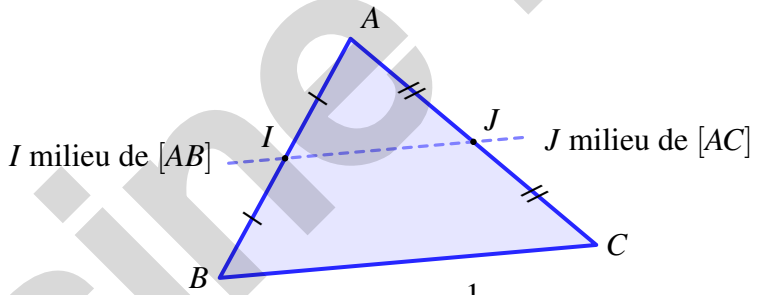
Alors : $(IJ) \parallel (BC)$

Propriété

La distance entre les milieux de deux cotés d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième coté
Autrement dit :
Soit ABC est un triangle

Si $\begin{cases} I \text{ milieu de } [AB] \\ J \text{ milieu de } [AC] \end{cases}$ alors $IJ = \frac{1}{2}BC$

✿ Figure géométrique :



Alors : $IJ = \frac{1}{2}BC$

C'est à dire : $BC = 2IJ$

⚠ ✯ Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle et deux milieux de deux cotés
✯ On utilise cette propriété pour calculer les longueurs

Application

Soit ABC un triangle tel que $BC = 4cm$
Soient M et N les symétriques respectifs du point A per rapport à B et C

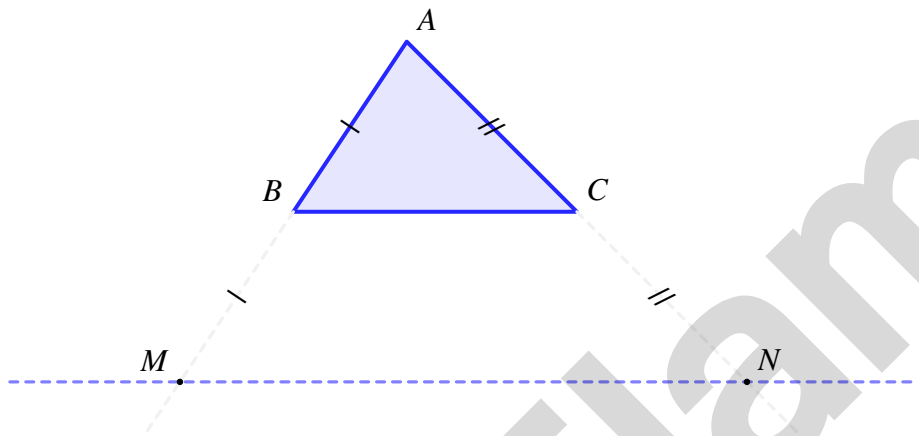
1. Tracer une figure
2. Montrer que $(MN) \parallel (BC)$
3. Montrer que $MN = 8cm$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Solution

1 Traçons une figure



2 On a M le symétrique de A par rapport à B, donc B est le milieu du segment $[AM]$
On a N le symétrique de A par rapport à C, donc C est le milieu du segment $[AN]$
Dans le triangle AMN, ona $\begin{cases} B \text{ milieu de } [AM] \\ C \text{ milieu de } [AN] \end{cases}$
Donc, d'après, la première propriété $(BC) \parallel (MN)$

3 Dans le triangle AMN, ona $\begin{cases} B \text{ milieu de } [AM] \\ C \text{ milieu de } [AN] \end{cases}$
Donc, d'après, la deuxième propriété $MN = 2BC$
Or $BC = 4cm$, donc $MN = 2 \times 4cm = 8cm$

II La droite passante par le milieu d'un coté d'un triangle et parallèle a un autre

Activité

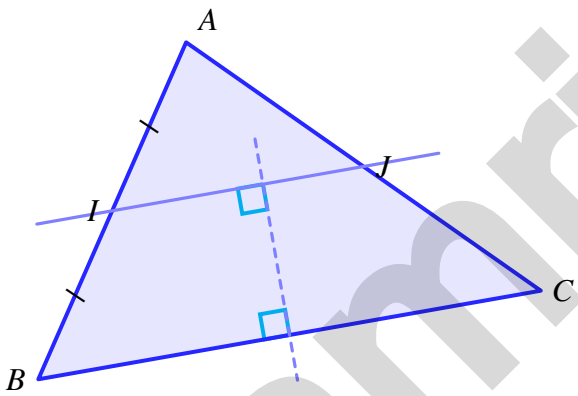
1 Construire un triangle ABC
2 Placer I les milieu de $[AB]$
3 Construire la droite (D) qui passe par I et parallèle (BC)
Soit J le point d'intersection de (D) et (AC)
4 Construire le point K tel que le quadrilatère $BCKI$ soit un parallélogramme
5 Montrer que $KC = AI$
6 Quelle est la nature de $AICK$
7 En déduire que J est le milieu de $[AC]$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

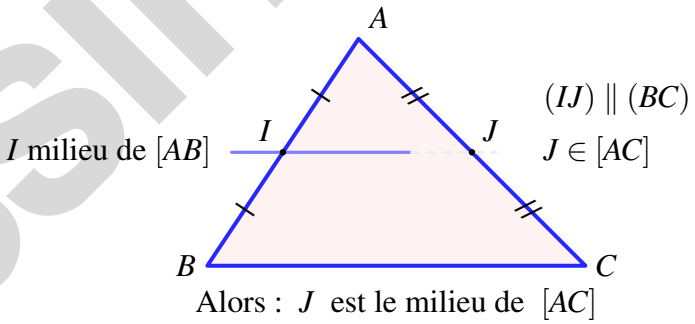
Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AB]$
la droite qui passe par I et qui est parallèle à (BC) coupe $[AC]$ en J
En utilisant le compas , on trouve que J est le milieu de $[AC]$



Propriété

La droite passante par le milieu d'un coté d'un triangle et parallèle au deuxième coté, coupe le troisième coté en son milieu
Autrement dit :
Soit ABC est un triangle
Si $\begin{cases} I \text{ milieu de } [AB] \\ \text{La parallèle à } (BC) \text{ passante par I coupe } [AC] \text{ en J} \end{cases}$
Alors J est milieu de $[AC]$

✿ Figure géométrique :



Alors : J est le milieu de $[AC]$

⚠ ✯ Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle, le milieu d'un coté et d'une parallèle au deuxième coté qui passe par ce milieu
✯ On utilise cette propriété pour montrer le milieu d'un coté d'un triangle

Application

Soit ABc un triangle, et E le symétrique du point A par rapport à C
La droite parallèle à (AB) et qui passe par C coupe $[BE]$ en F

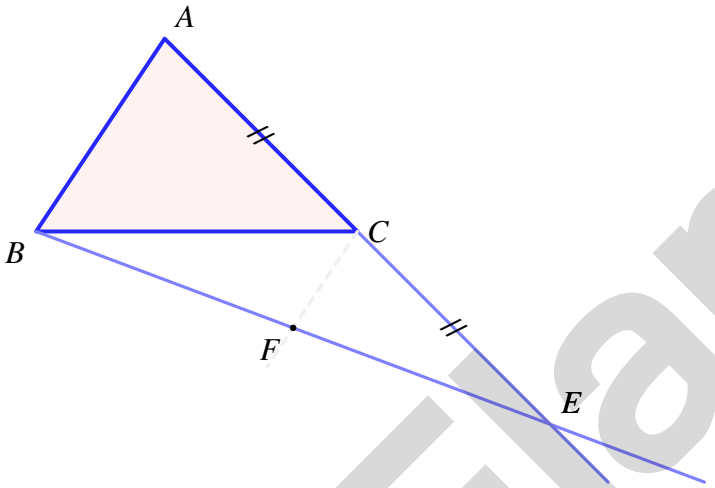
1. Faire une figure
2. Montrer que F est le milieu du segment $[BE]$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Solution

1 Traçons la figure



2 On a E le symétrique de A par rapport à C, donc C est le milieu du segment $[AE]$

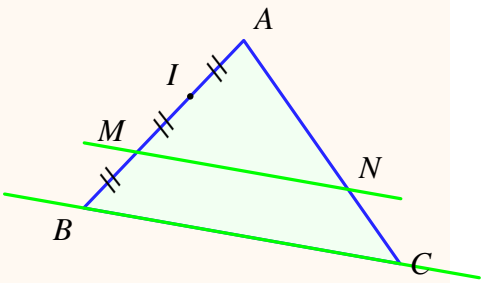
Dans le triangle ABE, on a : $\begin{cases} C \text{ est le milieu du coté } [AE] \\ \text{La droite parallèle à } (AB) \text{ passante par } C \text{ coupe } [BE] \text{ en } F \end{cases}$

D'ou : F est le milieu du coté $[BE]$

III La droite parallèle à un coté dans un triangle

Activité

Sur la figure ci-contre, les droites en vers sont parallèles, et $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$, et I est le milieu du segment $[AM]$



1 Tracer la droite (D) passante par I et parallèle à (BC)
Noter J le point d'intersection de (D) et (AC)

2 Justifier pourquoi J est le milieu du segment $[AN]$

3 Montrer que la droite (MN) coupe le segment $[BJ]$ en son milieu

4 En déduire que $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$

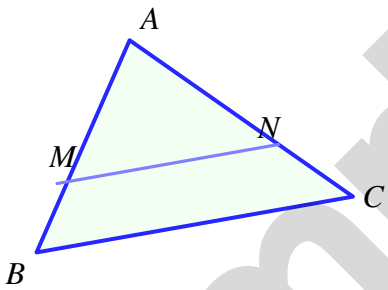
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit ABC un triangle et M et N deux points tel que $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$

Donc cela nous permis d'écrire : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$



Propriété

Dans un triangle ABC

Si $\begin{cases} M \in [AB] \\ N \in [AC] \end{cases}$, tel que $(MN) \parallel (BC)$

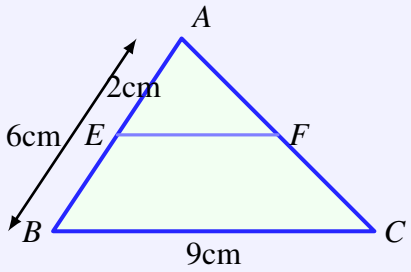
Alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

⚠ ✯ Pour appliquer cette propriété, on a besoin d'un triangle, et d'une parallèle à un coté qui coupe les deux autres cotés
✯ On utilise cette propriété pour calculer les longueurs

Application

On considère la figure, ci-contre, telle que ABC est un triangle avec : $AB = 6cm$, $AE = 2cm$, $BC = 9cm$ et $(EF) \parallel (BC)$

Montrer que :$EF = 3cm$



Solution

Dans le triangle ABC, on a $\begin{cases} E \in [AB] \\ F \in [AC] \end{cases}$ tel que $(EF) \parallel (BC)$

Donc, $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$, c'est à dire : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF}{BC}$

D'ou : $\dfrac{2}{6} = \dfrac{EF}{9}$, donc $EF = \dfrac{2 \times 9}{6} = \dfrac{18}{6}$

Alors $EF = 3cm$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

IV Division d'un segment en morceaux égaux

Activité

Soit $[AB]$ un segment sur une demi-droite d'origine A
Soit C un point tel que $C \notin (AB)$ et $AC = 5$
Soit I un point du segment $[AC]$ tel que $AC = 1$
La droite passante par I et parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en J

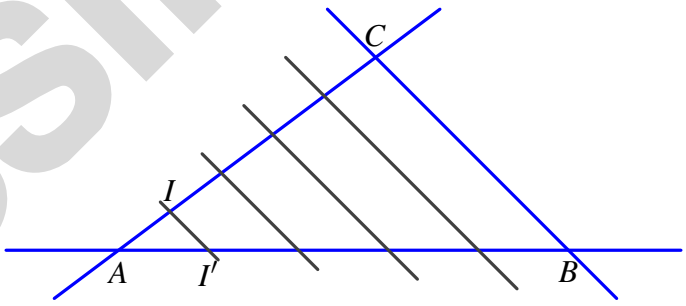
1. Montrer que $\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC}$
2. déduire que $AJ = \frac{1}{5}AB$
3. Diviser le segment en 5 morceaux égaux

Définition

Pour diviser un segment $[AB]$ en n morceaux égaux, on suit les étapes suivantes :
① On considère un point C différent de A et B tel que $AC = n$
② Sur le segment $[AC]$ on considère un point I tel que $AI = 1$
③ On trace la droite (BC)
④ On construit la droite (D) passante par I et parallèle à (BC) et qui coupe $[AB]$ en I' ⑤ On divise, alors, le segment $[AB]$ à l'aide du compas et en considérons AI' comme unité

• Exemple

Pour $n = 5$



Application

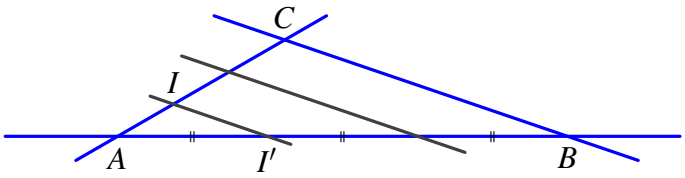
Soit $[AB]$ un segment tel que $AB = 7cm$
Diviser $[AB]$ en 3 morceaux égaux

Solution

On suit les mêmes étapes que l'exemple précédent, et on obtient :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today