Ordre et opérations

I Comparaison de deux nombres réels

1 Activités

Activité

Comparer a et b dans les cas suivants :

★) $a = \frac{15}{7}$ et $b = \frac{12}{7}$

★) $a = \frac{15}{14}$ et $b = \frac{-12}{7}$

★) $a = \frac{5}{4}$ et $b = \frac{11}{8}$

★) $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{6}{11}$

Solution

Comparons a et b dans les cas suivants :

★) On a $15 > 12$ donc $\frac{15}{7} > \frac{12}{7}$ donc $a > b$

★) On a $\frac{15}{14} > 0$ et $\frac{-12}{7} < 0$ donc $\frac{15}{14} > \frac{-12}{7}$ donc $a > b$

★) On a $a = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ et $10 < 11$ donc $\frac{5}{4} < \frac{11}{8}$ donc $a < b$

★) On a $5 < 11$ donc $\frac{6}{5} > \frac{6}{11}$ donc $a > b$

2 Règle

Règle

Soit a et b deux nombres réels

★ Si $a - b \leqslant 0$, alors $a \leqslant b$

★ Si $a - b \geqslant 0$, alors $a \geqslant b$

C'est à dire, pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence

Yassine Elamri

3 Exemples

EXEMPLES

1. Comparer les nombres $a=\dfrac{4}{35}$ et $b=\dfrac{2}{15}$
2. Comparer les nombres $2\sqrt{3}-4$ et $\sqrt{3}-5$
3. Comparer x et y tel que : $x=y-3$

Solution

1. Comparons $a=\dfrac{4}{35}$ et $b=\dfrac{2}{15}$
   On a : $a-b=\dfrac{4}{35}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{12}{105}-\dfrac{14}{105}=\dfrac{12-14}{105}=\dfrac{-2}{105}$
   Or : $\dfrac{-2}{105}<0$, donc $a-b<0$
   Alors $a<b$
2. Comparons $2\sqrt{3}-4$ et $\sqrt{3}-5$
   On a : $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-5)=2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+5=\sqrt{3}+1$
   Or : $\sqrt{3}+1>0$ donc $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-5)>0$
   Alors $2\sqrt{3}-4>\sqrt{3}-5$
3. Comparons x et y tel que : $x=y-3$
   On a : $x-y=(y-3)-y=y-3-y=-3$, donc $x-y<0$
   Alors : $x<y$

Application

Comparer les deux nombres dans chaque cas

1. $\dfrac{12}{7}$ et $\dfrac{15}{14}$
2. $7+\sqrt{2}$ et $-3\sqrt{2}-1$
3. $\sqrt{3}-1$ et $5\sqrt{3}+4$

Solution

Comparons les deux nombres dans chaque cas

1. Comparons : $\dfrac{12}{7}$ et $\dfrac{15}{14}$
   On a : $\dfrac{15}{14}-\dfrac{12}{7}=\dfrac{15-24}{14}=\dfrac{-9}{14}$
   Or $\dfrac{-9}{14}<0$ donc $\dfrac{15}{14}-\dfrac{12}{7}<0$
   Alors : $\dfrac{15}{14}<\dfrac{12}{7}$
2. Comparons : $7+\sqrt{2}$ et $-3\sqrt{2}-1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On a : $\left(7+\sqrt{2}\right)-\left(-3\sqrt{2}-1\right)=7+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+1=4\sqrt{2}+8$
Or : $4\sqrt{2}+8>0$ donc $\left(7+\sqrt{2}\right)-\left(-3\sqrt{2}-1\right)>0$
Alors : $7+\sqrt{2}>-3\sqrt{2}-1$

3 Comparons : $\sqrt{3}-1$ et $5\sqrt{3}+4$
On a : $\left(5\sqrt{3}+4\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)=5\sqrt{3}+4-\sqrt{3}+1=4\sqrt{3}+5$
Or : $4\sqrt{3}+5>0$ donc $\left(5\sqrt{3}+4\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)>0$
Alors : $\sqrt{3}-1<5\sqrt{3}+4$

II Ordre et opérations

1 Ordre et addition

a Proposition

Proposition

Soit a, b et c trois nombres réels

- ★ Si $a\leqslant b$ alors $a+c\leqslant b+c$
- ★ Si $a+c\leqslant b+c$ alors $a\leqslant b$

• Exemple

Soit a et b deux nombres réels tel que : $a+4\leqslant b$
Montrer que : $a+1\leqslant b$

Solution

Montrons que : $a+1\leqslant b$
On a : $a+4\leqslant b$, donc $a+4-3\leqslant b-3$
Alors : $a+1\leqslant b$

b Proposition

Proposition

Soit a, b, s et d trois nombres réels

- ★ Si $a\leqslant b$ et $c\leqslant d$ alors $a+c\leqslant b+d$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit a et b deux nombres réels tel que : $a+3 \leqslant 3$ et $b+4 \leqslant \sqrt{2}$
Montrer que : $a+b+7 \leqslant \sqrt{2}+3$

Solution

Montrons que : $a+b+7 \leqslant \sqrt{2}+3$
On a : $a+3 \leqslant 3$ et $b+4 \leqslant \sqrt{2}$, donc $a+3+b+4 \leqslant 3+\sqrt{2}$
Alors : $a+b+7 \leqslant \sqrt{2}+3$

2 Ordre et multiplication

a Activité

Activité

Soient a, b, et c trois nombres réels tel que : $a \leqslant b$

1. Supposons que $c > 0$, comparer ac et bc
2. Supposons que $c < 0$, comparer ac et bc

Solution

1. Supposons que $c > 0$, comparons ac et bc
   On a $ac - bc = c(a-b)$
   Or $a \leqslant b$ donc $a-b \leqslant 0$, et $c > 0$
   Donc $c(a-b) \leqslant 0$, c'est à dire $ac - bc \leqslant 0$
   Alors $ac \leqslant bc$
2. Supposons que $c < 0$, comparons ac et bc
   On a $ac - bc = c(a-b)$
   Or $a \leqslant b$ donc $a-b \leqslant 0$, et $c < 0$
   Donc $c(a-b) \geqslant 0$, c'est à dire $ac - bc \geqslant 0$
   Alors $ac \geqslant bc$

b Proposition

Proposition

Soit a, b et c trois nombres réels

- ★ Si $a \leqslant b$ et $c > 0$ donc $a \times c \leqslant b \times c$
- ★ Si $a \leqslant b$ et $c < 0$ donc $a \times c \geqslant b \times c$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

✪ Si $a \leqslant b$ alors $-a \geqslant -b$
C'est à dire, l'opposé change l'ordre

• Exemple

Soient a et b deux nombres réels tel que : $a \geqslant \frac{4}{3}$ et $b \geqslant \sqrt{3}$
Déduire un ordre de $3a$ et de $-2b$

Solution

☆ Déduisons un ordre de $3a$
On a : $a \geqslant \frac{4}{3}$ donc $3 \times a \geqslant 3 \times \frac{4}{3}$ donc $3a \geqslant 4$ ☆ Déduisons un ordre de $-2b$
On a : $b \geqslant \sqrt{3}$ donc $-2 \times b \leqslant -2 \times \sqrt{3}$ donc $-2b \leqslant -2\sqrt{3}$

c Proposition

Proposition

Soient a, b, c et d des nombres réels positifs
Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ Alors $a \times c \leqslant b \times d$

• Exemple

Soient x et y deux nombres réels positifs tel que : $x < \sqrt{3}$ et $y < 6\$sqrt2$
Montrer que : $xy < 6\sqrt{2}$

Solution

Montrons que : $xy < 6\sqrt{2}$
On a : $\begin{cases} x < \sqrt{3} \\ y < 6\$sqrt2 \end{cases}$ donc $x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$ C'est à dire $x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ C'est à dire $x \times y < 2\sqrt{3}^2 \times \sqrt{2}$ C'est à dire $x \times y < 2 \times 3 \times \sqrt{2}$ C'est à dire $x \times y < 6 \times \sqrt{2}$ C'est à dire $xy < 6\sqrt{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

d Exercice d'application

Application

Soient x et y deux nombres réels tel que : $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 2$
Montrer que : $(x-1)(y-2) \geqslant 0$

Solution

Montrons que : $(x-1)(y-2) \geqslant 0$
On a $x \geqslant 1$ donc $x-1 \geqslant 0$
et on a $y \geqslant 2$ donc $y-2 \geqslant 0$
D'où $(x-1)(y-2) \geqslant 0$

3 Ordre et inverse

a Proposition

Proposition

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs
Si $a \leqslant b$ alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$ et la réciproque est vraie

Remarque

✪ L'inverse change l'ordre

b Exemples

Exemples

✶ On a $2 \leqslant 4$ dons $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4}$
✶ On a $11 > 5$ dons $\frac{1}{11} < \frac{1}{5}$

Application

Soit x un nombre réel tel que $x \geqslant 1$
Montrer que : $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geqslant \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

Solution

Montrons que : $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geqslant \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On a $x \geqslant 1$ donc $x+2\sqrt{3} \geqslant 1+2\sqrt{3}$

Alors $\dfrac{1}{x+2\sqrt{3}} \leqslant \dfrac{1}{1+2\sqrt{3}}$

D'où $\dfrac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geqslant \dfrac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

4 Autres propriétés : Carré et racine carré

a Proposition

Proposition

(Carré) Soient a et b deux nombre réels positifs

★ $a \leqslant b$ est équivalent à $a^2 \leqslant b^2$

Remarque

★ a et b deux nombres réels négatifs
$a \leqslant b$ est équivalent à $a^2 \geqslant b^2$

★ L'ordre change dans les cas suivants :

- On multiplie par un nombre négatif
- On fait l'inverse
- On prend le carrés de deux nombres négatifs

Exemples

① Comparer 3 et $2\sqrt{2}$

② Comparer $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

Solution

① Comparons 3 et $2\sqrt{2}$

On a $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4\times 2 = 8$ et $3^2 = 9$

Donc $3^2 > \left(2\sqrt{2}\right)^2$, alors $3 > 2\sqrt{2}$

② Comparons $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

On a $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 4\times 5 = 20$ et $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9\times 2 = 18$

Donc $\left(2\sqrt{5}\right)^2 > \left(3\sqrt{2}\right)^2$, donc $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$, alors $-2\sqrt{5} < -3\sqrt{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

b Proposition

Proposition

(Racine carré) Soit a et b deux nombres réels positifs
★ Si $a \leqslant b$ alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$
★ Si $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ alors $a \leqslant b$

Application

1 Comparer $3\sqrt{3}$ et $4\sqrt{2}$
2 Comparer $-\sqrt{91}$ et $-6\sqrt{3}$
3 Comparer les nombres $\sqrt{5}+4$ et $\sqrt{3}+4$

Solution

1 Comparons $3\sqrt{3}$ et $4\sqrt{2}$
On a $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9\times 3 = 27$ et $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16\times 2 = 32$
Or $27 < 32$ donc $\left(3\sqrt{3}\right)^2 < \left(4\sqrt{2}\right)^2$
Alors $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$

2 Comparons $-\sqrt{91}$ et $-6\sqrt{3}$
On a $\sqrt{91}^2 = 91$ et $\left(6\sqrt{3}\right)^2 = 36\times 3 = 108$
Or $91 < 108$ donc $\sqrt{91}^2 < \left(6\sqrt{3}\right)^2$ donc $\sqrt{91} < 6\sqrt{3}$ Alors $-\sqrt{91} > -6\sqrt{3}$

3 Comparons $\sqrt{5}+4$ et $\sqrt{3}+4$
On a $\sqrt{3}^2 = 3$ et $\sqrt{5}^2 = 5$
Or $3 < 5$ donc $\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$ donc $\sqrt{3} < \sqrt{5}$
Alors $\sqrt{3}+4 < \sqrt{5}+4$

III Encadrement

1 Encadrement d'une somme

Proposition

On considère tous les nombres réels
Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$. Alors : $a+c \leqslant x+y \leqslant b+d$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit x et y deux nombres réels tel que : $2 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant -1$
Encadrer $x+y$

Solution

Enacdrons $x+y$
On a $2 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant -1$ donc $2+(-3) \leqslant x+y \leqslant 5+(-1)$
Alors $-1 \leqslant x+y \leqslant 4$

2 Encadrement d'un opposé

Proposition

Soit x un nombre réel tel que $a \leqslant x \leqslant b$
On a $-b \leqslant -x \leqslant -a$

• Exemple

Soit $-4 \leqslant x \leqslant 3$ donc $-3 \leqslant -x \leqslant 4$

3 Encadrement d'une différence

Proposition

On considère tous les nombres réels
Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$. Alors : $a-d \leqslant x-y \leqslant b-c$

Remarque

On a $a-b=a+(-b)$
Donc pour encadrer $a-b$, on encadre d'abord $-b$ puis on applique la proposition 8 (Proposition de l'encadrement d'une somme)

• Exemple

Soit x et y deux nombres réels tel que : $3 \leqslant x \leqslant 8$ et $-4 \leqslant y \leqslant 2$
Encadrer $x-y$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Solution

Enacdrons $x-y$
On a $-4 \leqslant y \leqslant 2$ donc $-2 \leqslant -y \leqslant 4$ On a $3 \leqslant x \leqslant 8$ et $-2 \leqslant -y \leqslant 4$ donc $3+(-2) \leqslant x+(-y) \leqslant 8+4$
Alors $1 \leqslant x-y \leqslant 12$

4 Encadrement d'un produit

Proposition

On considère tous les nombres réels positifs
Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$. Alors : $a \times c \leqslant x \times y \leqslant b \times d$

• Exemple

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs
On a $3 \leqslant x \leqslant 7$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$
Encadrer xy

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif
On a $4 \leqslant x \leqslant 8$ et $-5 \leqslant y \leqslant -2$
Encadrer xy

Solution

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs
Encadrons xy
On a $3 \leqslant x \leqslant 7$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$
Donc $3 \times 1 \leqslant xy \leqslant 7 \times 4$
Alors $3 \leqslant xy \leqslant 28$

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif
Encadrons xy
D'abord les deux nombres encadrants y doivent être positifs
On a $-5 \leqslant y \leqslant -2$ donc $2 \leqslant -y \leqslant 5$
On a $4 \leqslant x \leqslant 8$ et $2 \leqslant -y \leqslant 5$ (Remarquez que tous les nombres sont positifs)
Donc $4 \times 2 \leqslant x \times (-y) \leqslant 8 \times 5$
Donc $8 \leqslant -xy \leqslant 40$
Mais ce qu'on cherche, c'est encadrer xy et pas $-xy$, donc on se débarrasse du signe $-$
On a $8 \leqslant -xy \leqslant 40$ alors $-40 \leqslant xy \leqslant -8$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

5 Encadrement d'un inverse

Proposition

Soient x, a et b des nombres réels non nuls tel que : $a \leqslant x \leqslant b$
On a : $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{a}$

• Exemple

On a $2 \leqslant x \leqslant 4$ donc $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$

6 Encadrement d'un quotient

Proposition

On considèretous les nombres réels positifs
Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$ tel que : $c \neq 0$; $y \neq 0$ et $d \neq 0$
Alors : $\dfrac{a}{d} \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{b}{c}$

Remarque

On a $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$

Donc, pour encadrer $\dfrac{a}{b}$, on en cadre d'abord $\dfrac{1}{b}$, après on applique la proposition la proposition 11 (Proposition de l'encadrement d'un produit)

• Exemple

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs
On a $6 \leqslant x \leqslant 10$ et $2 \leqslant y \leqslant 3$
Encadrer $\dfrac{x}{y}$

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif
On a $2 \leqslant x \leqslant 5$ et $-4 \leqslant y \leqslant -2$
Encadrer $\dfrac{x}{y}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Solution

★ Cas 1 : tous les nombres sont positifs

Encadrons $\frac{x}{y}$

On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

Encadrant d'abord $\frac{1}{y}$

On a $2 \leqslant y \leqslant 3$ donc $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}$

On a $\begin{cases} 6 \leqslant x \leqslant 10 \\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $6 \times \frac{1}{3} \leqslant x \times \frac{1}{y} \leqslant 10 \times \frac{1}{2}$

Alors $2 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 5$

★ Cas 2 : l'un des nombres est positif et l'autre est négatif

Encadrons $\frac{x}{y}$

On doit transformer les nombres négatifs en nombres positifs

On a $-4 \leqslant y \leqslant -2$ donc $2 \leqslant -y \leqslant 4$

Après on encadre l'inverse de $-y$

On a $2 \leqslant -y \leqslant 4$ donc $\frac{1}{4} \leqslant \frac{-1}{y} \leqslant \frac{1}{2}$

On a $\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 5 \\ \frac{1}{4} \leqslant \frac{-1}{y} \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $2 \times \frac{1}{4} \leqslant x \times \frac{-1}{y} \leqslant 5 \times \frac{1}{2}$

Donc $\frac{2}{4} \leqslant \frac{-x}{y} \leqslant \frac{5}{2}$

Donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{-x}{y} \leqslant \frac{5}{2}$

Alors $\frac{-5}{2} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{-1}{2}$

Application

❶ *Exercice 1 :*

Soit a et b deux nombres réels tel que : $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $-4 \leqslant b \leqslant -3$

Encadrer :

★ $a+b$ ★ $a-b$ ★ ab ★ $\frac{a}{b}$

❷ *Exercice 2 :*

Soit a, b et c trois nombres réels tel que : $6 \leqslant a \leqslant 8$, $-4 \leqslant b \leqslant -2$ et $-3 \leqslant c \leqslant 5$

Encadrer :

★ a^2 ★ b^2 ★ $a+2b-4c$ ★ $\frac{a+b}{b^2}$

Solution

❶ *Exercice 1 :*

★ Encadrons $a+b$

on a $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $-4 \leqslant b \leqslant -3$

Donc $2+(-4) \leqslant a+b \leqslant 3+(-3)$

Alors $-2 \leqslant a+b \leqslant 0$

★ Encadrons $a-b$

on a $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $-4 \leqslant b \leqslant -3$

Donc $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $3 \leqslant -b \leqslant 4$

Donc $2+3 \leqslant a+(-b) \leqslant 3+4$

Alors $5 \leqslant a-b \leqslant 7$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

★ Encadrons ab
on a $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $-4 \leqslant b \leqslant -3$
Donc $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $3 \leqslant -b \leqslant 4$
Donc $2 \times 3 \leqslant a \times (-b) \leqslant 3 \times 4$
Donc $6 \leqslant -ab \leqslant 12$
Alors $-12 \leqslant ab \leqslant -6$

★ Encadrons $\dfrac{a}{b}$
on a $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $-4 \leqslant b \leqslant -3$
Donc $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $3 \leqslant -b \leqslant 4$
Donc $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{-1}{b} \leqslant \dfrac{1}{3}$
Donc $2 \times \dfrac{1}{4} \leqslant a \times \dfrac{-1}{b} \leqslant 3 \times \dfrac{1}{3}$
Donc $\dfrac{2}{4} \leqslant \dfrac{-a}{b} \leqslant \dfrac{3}{3}$
Donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{-a}{b} \leqslant 1$
Donc $-1 \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{-1}{2}$

❷ *Exercice 2 :*

★ Encadrons a^2
On a $6 \leqslant a \leqslant 8$ donc $6^2 \leqslant a^2 \leqslant 8^2$
Alors $36 \leqslant a^2 \leqslant 64$

★ Encadrons b^2
On a $-4 \leqslant b \leqslant -2$
Donc $(-2)^2 \leqslant b^2 \leqslant (-4)^2$
Alors $4 \leqslant b^2 \leqslant 16$

★ Encadrons $a+2b-4c$
On a $-4 \leqslant b \leqslant -2$ donc $-8 \leqslant 2b \leqslant -4$
On a $-3 \leqslant c \leqslant 5$ Donc $-20 \leqslant -4c \leqslant 12$
Ona $\begin{cases} 6 \leqslant a \leqslant 8 \\ -8 \leqslant 2b \leqslant -4 \\ -20 \leqslant -4c \leqslant 12 \end{cases}$
Donc $6-8-20 \leqslant a+2b-4c \leqslant 8-4+12$
Alors $-22 \leqslant a+2b-4c \leqslant 16$

★ Encadrons $\dfrac{a+b}{b^2}$
On a $\begin{cases} 6 \leqslant a \leqslant 8 \\ -4 \leqslant b \leqslant -2 \end{cases}$
Donc $6-4 \leqslant a+b \leqslant 8-2$
Donc $2 \leqslant a+b \leqslant 6$
Et on a $4 \leqslant b^2 \leqslant 16$ donc $\dfrac{1}{16} \leqslant \dfrac{1}{b^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$
On a $\begin{cases} 2 \leqslant a+b \leqslant 6 \\ \dfrac{1}{16} \leqslant \dfrac{1}{b^2} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$
Donc $2 \times \dfrac{1}{16} \leqslant (a+b)\dfrac{1}{b^2} \leqslant 6 \times \dfrac{1}{4}$
Donc $\dfrac{2}{16} \leqslant \dfrac{a+b}{b^2} \leqslant \dfrac{6}{4}$
Alors $\dfrac{1}{8} \leqslant \dfrac{a+b}{b^2} \leqslant \dfrac{3}{2}$

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today