I La limite d'une fonction au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

1 Limite infinie à l'infinie

Activité

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3$.
En utilisant une calculatrice compléter le tableau suivant :

x	10^3	10^5	10^7	10^8	10^9
$f(x)$	.....	.....	.....	.....	.....

Remarque

On voit que lorsque x prend des valeurs possitives plus grandes $f(x)$ prend des valeurs possitives plus grandes .
On dit que lorsque x tend vers $+\infty$; $f(x)$ tend vers $+\infty$.
On dit aussi que $+\infty$ est la limite de f quand x tend vers $+\infty$;
et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
de même on peut remarquer que lorsque x prend des valeurs négatives plus grandes $f(x)$ prend des valeurs négatives plus grandes .
on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Propriété

En général ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty; & \text{si n est pair} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty; & \text{si n est impair} \end{cases}$$

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$.

Yassine Elamri

2 Limite finie à l'infinie

Activité

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{x}$.
En utilisant une calculatrice compléter le tableau suivant :

x	10^3	10^5	10^7	10^8	10^9
$g(x)$	.....	.....	.....	.....	.....

Remarque

On voit que lorsque x prend des valeurs possitives plus grandes $g(x)$ soit égale presque 0 .
On dit que lorsque x tend vers $+\infty$; les valeurs de $g(x)$ tends vers 0 .
On dit aussi que 0 est la limite de g quand x tend vers $+\infty$;
et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
De même on peut remarquer que lorsque x prend des valeurs négatives plus grandes $g(x)$ soit égale presque 0 .
On écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Propriété

En général ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5} = 0$.

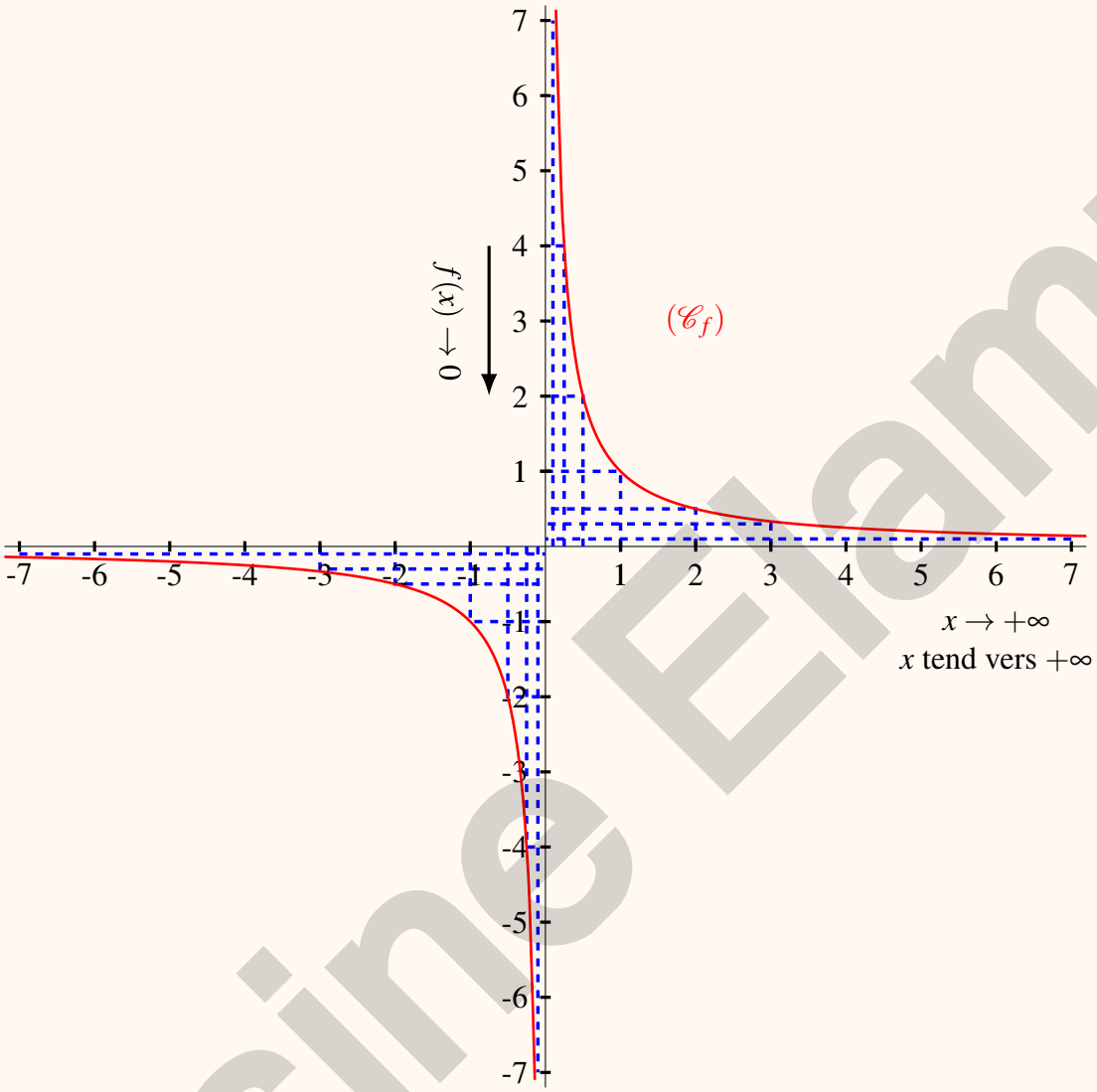
II La limite d'une fonction en un point

Activité

Ci-dessous la représentation de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



Choisir la bonne réponse :

⋆ Quand x prend des valeurs très proches de 0 de côté droite :

- ○ La courbe de f monte plus haut.
- ○ La courbe de f descend plus bas.

⋆ Quand x prend des valeurs très proches de 0 de côté gauche :

- ○ La courbe de f monte plus haut.
- ○ La courbe de f descend plus bas.

Remarque

⋆ Lorsque x tend vers 0 à droite ; la courbe de f monte en haut (les valeurs de $f(x)$ prennent des valeurs positives plus grandes). on dit que $f(x)$ tends vers $+\infty$;
Et on écrit : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

⋆ Lorsque x tend vers 0 à gauche ; la courbe de f descend en bas (les valeurs de $f(x)$ prennent des valeurs négatives plus grandes) . $f(x)$ tends vers $-\infty$;
On écrit : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

Activité

Ci-dessous la représentation de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$



Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

En général ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty; & \text{si n est pair} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty; & \text{si n est impair} \end{cases}$$

• Exemple

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty; \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty; \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^3} = -\infty.$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Opérations sur les limites

Propriété

On admet toutes les opérations suivantes.
Dans ce qui suit, f et g deux fonctions ; ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.
Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.
L'abréviation * *F.I* * signifie * Forme indéterminée *, c'est-à-dire qu'on ne peut pas déterminer la limite immédiatement et tout résultat est possible.

1 LIMITE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I*

2 LIMITE D'UN PRODUT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

3 LIMITE D'UN QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou 0^-	$\ell>0$ ou 0^+	$\ell<0$ ou 0^-	$\ell<0$ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

4 LIMITE DE L'INVERSE D'UNE FONCTION

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque

Les formes indéterminées : "$\infty-\infty$", "$0\times\pm\infty$", "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$".
Forme indéterminée désigne qu'on ne peut pas calculer la limite directement ; alors il faut utiliser d'autre méthodes par exemple (la factorisation - la division euclidienne -

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

le conjugué- ...)

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+6=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-8=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^4=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^4=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^7=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^7=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-7}{x^4}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{27}{x^3}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{9}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5}{4}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to5^+} \dfrac{-7}{x-5}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to6^+} \dfrac{53}{x-6}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{7}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{-4}{5x-15}=+\infty$.

Propriété

Soit f une fonction numérique ; P et Q deux fonctions polynômiales et a un réel :

1. $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$
2. Si $Q(a)\neq0$; alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (terme de plus haut degré de P))
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\text{(terme de plus haut degré de } P)}{\text{(terme de plus haut degré de } Q)}$

• Exemple

Déterminons les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+6x-7$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -7x^2+9$; $\lim\limits_{x\to4} 9x^2+6$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^4+x^2-7}{x^3-2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2+x-17}{x^2-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2+x}{x^5-9}$.

$\lim\limits_{x\to2} 2x^3+6x-7$; $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{5x^2+x-3}{x+6}$; $\lim\limits_{x\to6^-} \dfrac{x+4}{2x-12}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today