Calcul matriciel

I Définitions et vocabulaire :

Définition

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.
Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Le nombre a_{ij} (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) est situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne. Il est appelé un coefficinet de la matrice.
Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la diagonale principale de la matrice.
Les éléments $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ forment la j-ème colonne de la matrice.
Les éléments $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$ forment la i-ème ligne de la matrice.

• Exemple

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 \\ -5 & 6 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 45 & 7 \\ 7 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ est matrice à 4 ligne 4 colonnes.
- $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 45 & 2 \end{pmatrix}$ est la diagonale principale de la matrice.
- 5 est situé dans la 4-ème ligne et la 3-ème colonne.

Définition

- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée matrice ligne de taille n.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée matrice colonne de taille n.
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée matrice carrée de taille n ou d'ordre n.

• Exemple

- $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de taille 3.

Yassine Flamri

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de taille 4.
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition

Soit $2 \leq n \leq 4$ Une matrice diagonale (a_{ij}) avec $1 \leq i \leq n$
$1 \leq j \leq n$ est une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients à l'extérieur de la diagonale principale sont tous nuls, c'est à dire $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• Exemple

- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 2.
- $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ matrice diagonale d'ordre 3.

Définition

La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n notée I_n dont la diagonale principale ne contient que des 1 c'est dire $a_{ii} = 1$ pour $1 \leq i \leq n$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Exemple

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice unité d'ordre 2.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Opérations sur les matrices :

1 Somme de deux matrices :

Définition

Soit $2 \leq n \leq 4$.
Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices carée d'ordre n.
La somme des matrices A et B est la matrice notée $A+B$ définie par :
$A+B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pout tout couple $(i;j)$ tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

• Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+9 \\ -3+4 & 5+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

Soient A,B et C trois matrices de meme taille, on a :

- $A+B = B+A$ (commutativité)
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativité)

Définition

Soient A et B deux matrices de meme taille.
la difference des matrices A et B est la matrice notée $A-B$ égale à la somme $A+(-B)$ ou $-B$ est la matrice opposée de B dont les coefficients sont les opposés des coefficients de B.

• Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-9 \\ -3-4 & 5-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Produit d'une matrice par un réel :

Définition

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coeffcients de A par k.

• Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ On a : $5A = \begin{pmatrix} 5\times 1 & 5\times 0 \\ 5\times(-3) & 5\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -15 & 25 \end{pmatrix}$

3 Produit d'une matrice carée par une matrice ligne :

Définition

Soit $2 \leq n \leq 4$.

Le produit d'une matrice carée $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i,2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ par une matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ est la matrice colonne notée AB avec $AB = (c_{ij})$ de taille $n \times 1$ tel que c_{ij} est égal au produit de la i-ème ligne de A par B c'est à dire :

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{i1}\times b_{11} + a_{i2}\times b_{12} + \dots + a_{in}\times b_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\times b_{1j}$$

• Exemple

- $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 7 \\ -3\times 1 + 5\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 2 + 1\times 3 \\ 2\times 2 + 0\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

Application

Calculer les produits suivants :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4 Produit d'une matrice carée par une matrice carée :

Définition

Soit $2 \leq n \leq 4$.

Le produit d'une matrice carée d'ordre n $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ par une matrice carée

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ de meme ordre est la matrice carée d'ordre n notée AB avec $AB = (c_{ij})$ de taille $n \times 1$ tel que c_{ij} est égal au produit de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B c'est à dire :

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \dots \\ b_{j1} \end{pmatrix} = a_{i1} \times b_{j1} + a_{i2} \times b_{j2} + \cdots + a_{in} \times b_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

• Exemple

- $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 7 & 2 \times 2 + 0 \times 3 \\ -3 \times 1 + 5 \times 7 & -3 \times 2 + 5 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 32 & 9 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 1 \times 3 & 4 \times 1 + 1 \times 7 \\ 2 \times 2 + 0 \times 3 & 2 \times 1 + 0 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Application

Calculer les produits suivants :

- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

► $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

III Inversion matricielle et système

Définition

Soit A une matrice carrée
La matrice inverse de la matrice A, notée par A^{-1} vérifiée : $A.A^{-1} = I$

• Exemple

► La matrice : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

► $\begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

► Déterminons la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice inverse de A

On a : $A.A^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ a-c=0 \\ b-d=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c+2c=1 \\ 1+d+2d=0 \\ a=c \\ b=d+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{3} \\ d=-\frac{1}{3} \\ a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Donc :$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Propriété

Soit A une matrice carrée d'une matrice inverse A
Le système sous la forme matricielle $A.X = B$ peut être pré-multiplié par A^{-1} afin d'obtenir la solution :
$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$

• Exemple

Résolution du système : $\begin{cases} x+3y+4z = 50 \\ x+5y-4z = 2 \\ x+7y-2z = 31 \end{cases}$

La matrice A du système étant : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

On a : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

Donc $X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today