Fonctions logarithmiques

I Fonction logarithme népérienne

1 Définition et propriétés algébrique

D **Définition**

La fonction logarithme népérienne est une fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln

Conséquence immédiate :

- La fonction $x \to \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$
- La fonction $x \to \ln(u(x))$ est définie si : $u(x) > 0$
- $\ln(1) = 0$

Monotonie :

La fonction $x \to \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa fonction dérivée est $x \to \frac{1}{x}$

Donc la fonction $x \to \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

- $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[; \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[; \ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Exemple

1 Déterminons D_f l'ensemble de la définition de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x+1 > 0 \text{ et } x^2-1 \neq 0 \text{ et } x+1 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\}$ car $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2+1 > 0)$

Donc : $D_f =]-1,1[\cup]1,+\infty[$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(x+1) = 0$

Yassine Elamri

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $\ln(x^2-1)=\ln(3)$
- $\ln(x^2-1)>\ln(3)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) : $\begin{cases}\ln(xy)=\ln(2)\\ \ln(x+y)=\ln(3)\end{cases}$

Propriété

Propriété caractéristique : $(\forall x>0\,;\forall y>0)\ \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$

Règle de calculs

1 $(\forall x>0)\,;\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$

2 $(\forall x>0)(\forall y>0)\,;\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$

3 $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})\,;\ln(x^r)=r\ln(x)$

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

- $\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)<\ln(x+1)$
- $3\ln(x)\leq 2\ln(x)$
- $\ln(x+2\ln(x+2))=\ln(x+1)$
- $\ln(x)\ln(x+1)=\ln(x)\ln(2+x)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S_1) : $\begin{cases}\ln(x)+\ln(y)=\ln(2)\\ \ln(2)+\ln(x+y)=\ln(\sqrt{3}+1)\end{cases}$

(S_2) : $\begin{cases}\ln(x+y)=\ln(-x+3)\\ \ln(x+2y)=\ln(3)\end{cases}$

Yassine Elamri

2 Étude et représentation graphique :

D'après la définition de la fonction $x \to \ln(x)$ on peut conclure que :

La fonction $x \to \ln(x)$ est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

On pose $t = \frac{1}{x}$, alors : $x = \frac{1}{t}$ et $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t) = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, alors la courbe de la fonction $x \to \ln(x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

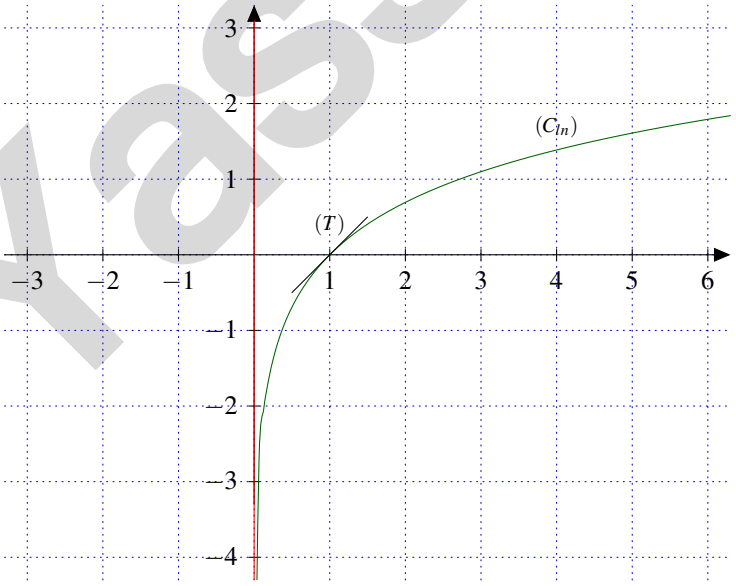
La courbe de la fonction $x \to \ln(x)$ admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

Tableau de variations

La fonction $x \to \ln(x)$ est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}$, d'où le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) $\ln(e) = 1$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

La courbe de la fonction ln



$(T) : y = x - 1$ est une droite tangente à la courbe $(C_{\ln})$ en $A(1,0)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Dérivée de la fonction : $x \to \ln\ln u(x)$

Soient u une fonction dérivable, strictement positive sur un intervalle I, et v une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $v(x) = \ln(x)$

Donc la fonction $v \circ u$ est bien définie et dérivable sur I et on a :

$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Théorème

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I alors la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I)\,;\, f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple

On considère le fonction f définie sur $I =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Comme la fonction $u : x \to \frac{x+1}{x-2}$ est strictement positive, et dérivable sur I, alors la fonction f est dérivable sur I et on a :

$(\forall x \in I)\,;\, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{\frac{x+1}{x-2}} = -\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

Corolaire

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I)\,;\, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \to \ln(|u(x)|) + c^{te}$

Application

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x-6}{x^2-12x+4}$
2. $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$
3. $g(x) = \tan(x)$
4. $u(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
5. $v(x) = \frac{7}{2x^2+x-3}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

4 Limites référentielles :

Propriété

1− $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

2− $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$

3− $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$; (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

4− $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

5− $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

6− $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$; (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

7− $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

8− $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

• Preuve

2− On pose $t = \frac{1}{x}$, alors $x = \frac{1}{t}$ et si $x \to 0^+$ on a : $t \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to +\infty} -\frac{\ln(t)}{t} = 0^-$

3− $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}(x\ln(x)) = 0^-$

6− $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0$

7− Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$

On sait que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = 1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$

8− On pose $t = x+1$, alors $x = t-1$ et si $x \to 0$ on a : $t \to 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}$

1 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$

On pose $t = \frac{1}{x}$, alors $x = \frac{1}{t}$ et si $x \to +\infty$ on a $t \to 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right) = 0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Car : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}=0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x(x+1))}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x-1}+\dfrac{\ln(x+1)}{x-1}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t}=0$ (on pose $t=x+1$, si $x\to+\infty$ on a $t\to+\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1}=0$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x-1}$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}=1$ car : on pose $t=x^2+x$, alors si $x\to 0$ on a $t\to 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$

Et aussi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-1}=-1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}=-1$

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}\times\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+4x-5}$

Comme : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}=1$ (car : on pose $t=x^3+2x-2$ alors si $x\to 1$ on a $t\to 1$)

donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$

Et aussi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+3)(x-1)}{(x+5)(x-1)}=\dfrac{5}{6}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}=\dfrac{5}{6}$

Application

Partie I

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=x-(x+1)ln(x+1)$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$
2. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g'(x)=-ln(x+1)$
3. En déduire que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g(x)\leq 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{ln(x+1)-x}{x}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

avec $||\vec{i}|| = 2cm$ et $||\vec{j}|| = 2cm$

1. Étudier la continuité de f au point $x_0 = 0$:
2. Étudier la dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat. (Indication : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+1)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$)
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique de ces résultats.
4. a. Montrer que : $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\,;\, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x+1)}$
   b. Étudier les variations de f, puis dresser sa table de variations
5. Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

II Fonctions logarithmiques de base a

1 Définition et règles de calcul

a Définition

D — **Définition**

Soit a un réel strictement positif et différents de 1

La fonction notée par $\log_a$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

S'appelle : la fonction logarithmique de base a

Exemple

- Pour : $a = e$; on aura : $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$
- $\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

b Propriété et règles de calcul

Propriété

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction ln restent valables pour la fonction $\log_a$.

- $(\forall x>0)\ (\forall y>0)\,;\ \log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$
- $(\forall x>0)\,;\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$
- $(\forall x>0)\ (\forall y>0)\,;\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
- $(\forall x>0)\ (\forall r\in\mathbb{Q})\,;\ \log_a(x^r)=r\log_a(x)$

• Preuve

Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction $\log_a$ et les propriétés de la fonction ln

c La monotonie

Soit a un réel strictement positif et différents de 1

On considère la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_a(x)=\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Comme la fonction $x\to\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, alors la fonction $f$est dérivable sur $]0,+\infty[$ Donc $(\forall x\in]0,+\infty[)\,;\ f'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$

Yassine Elamri

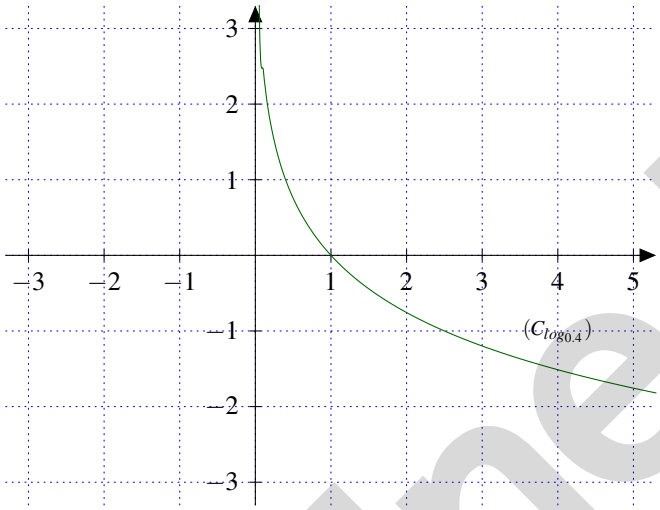
Today better than yesterday, tomorrow better than today

Si $a \in]0,1[$ alors $\ln(a) < 0$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\ f'(x) < 0,$

Alors f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

x	0		a		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

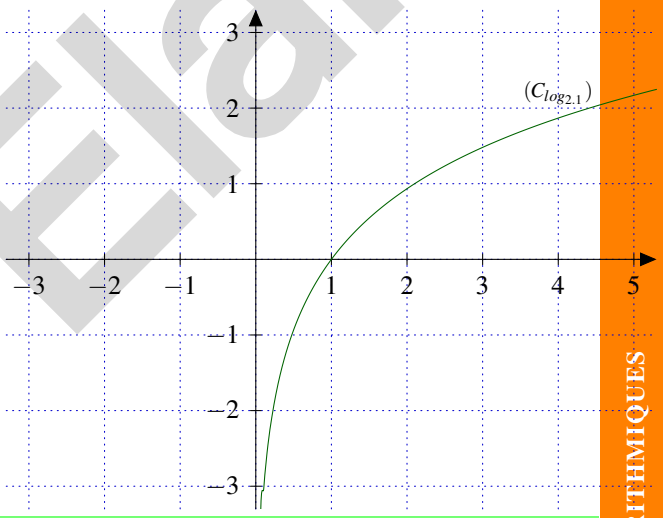


Si $a \in]1,+\infty$ alors $\ln(a) > 0$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\ f'(x) > 0,$

Alors f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	0		1		a		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



2 Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal

D **Définition**

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par log

$(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\ \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Propriété

1. $\log(10) = 1$
2. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\ \log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$
3. $(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\ \log(10^r) = r$
4. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\ \log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
5. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\ \log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Preuve

1 $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$; $(\log_a(a) = 1)$

2 $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})$; $\log(x) = r \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = r$

$\Leftrightarrow \ln(x) = r\ln(10)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(10^r)$

$\Leftrightarrow x = 10^r$

3 $(\forall r \in \mathbb{Q})$; $\log(10^r) = r\log(10) = r$

4 $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})$; $\log(x) > r \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} > r$

$\Leftrightarrow \ln(x) > r\ln(10)$; (car $\ln(10) > 0$)

$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(10^r)$

$\Leftrightarrow x > 10^r$; (car la fonction ln est strictement croissante)

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x+1) = \log_{x+1}(x)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\log_2(x) > \log_x(2)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today