Chapitre

Fonctions logarithmes

Cours 2BSM

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
• Les limites déjà citées concernant la fonction logarithme et la fonction exponentielle népérienne, en plus de : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$; $\lim_{x\to-\infty}x^n e^x$ et $\lim_{x\to0^+}x^n\ln(x)$; avec $n\in\mathbb{N}^*$ sont considérées comme limites fondamentales ; • On utilisera les fonctions logarithme et exponentielle dans la résolution de problèmes variés ; • Pour tout nombre a strictement positif on a $a^b = e^{b\ln(a)}$ • On insistera sur les applications du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour encadrer, majorer et minorer les expressions algébriques et étudier les suites numériques ; • On insistera sur l'interprétation géométrique des différents théorèmes et propriétés présentés dans ce paragraphe	• Maitriser le calcul sur les logarithmes ; • Maitriser la résolution d'équations et d'inéquations et de systèmes logarithmiques ; • Connaitre le logarithme décimal et ses applications (surtout dans la résolution d'équations de la forme $10^x = a$) ; • Maitriser et appliquer les limites logarithmiques fondamentales ; • Maitriser l'étude et la représentation de fonctions comportant la fonction logarithme népérien ;

Les prés-requis	Les extensions
• Fonctions primitives • Les limites • La continuité • Dérivation • T.R et T.A.F .	• Fonctions exponentielles • Les équations différentielles • Les intégrales • Structure algébrique

Yassine Elamri

I Fonction logarithme népérienne

1 Définition et propriétés algébrique

Activité

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$

1 Montrer que la fonction f admet une fonction primitive sur $]0,+\infty[$

2 Soit F une fonction primitive de la fonction f définie par : $\forall (x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

$F(xy)=F(x)+F(y)$, calculer $F(1)$

D **Définition**

La fonction logarithme népérienne est une fonction primitive de la fonction $x\to\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln

Conséquence immédiate :

- La fonction $x\to\ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$
- La fonction $x\to\ln(u(x))$ est définie si : $u(x)>0$
- $\ln(1)=0$

Monotonie :

La fonction $x\to\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa fonction dérivée est $x\to\frac{1}{x}$

Donc la fonction $x\to\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

- $\forall (x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,;\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b$
- $\forall (x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,;\ln(a)\leq\ln(b)\Leftrightarrow a\leq b$

Exemple

1 Déterminons D_f l'ensemble de la définition de la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\right)$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}>0\ \text{ et }\ x^2+1\neq 0\ \text{ et }\ x+1>0\right\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ln(x+1)>0\ \text{ et }\ x>-1\}$ car $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2+1>0)$

Étudions le signe de $\ln(x+1)$, résolvons l'équation $\ln(x+1)=0$

$\ln(x+)=0\Leftrightarrow\ln(x+1)=\ln(1)$

$\Leftrightarrow x+1=1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$\Leftrightarrow x = 0$

Si $-1 < x \leq 0$ on a $0 < x+1 \leq 1$ donc $\ln(x+1) \leq 0$

Si $x \geq 0$ on a $x+1 \geq 1$ donc $\ln(x+1) \geq 0$

Donc $D_f =]0, +\infty[$

2 Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $(S) : \begin{cases} \ln(xy) = \ln(2) \\ \ln(x+y) = \ln(3) \end{cases}$

$(S) : \begin{cases} \ln(xy) = \ln(2) \\ \ln(x+y) = \ln(3) \end{cases} \Leftrightarrow (S) : \begin{cases} xy = 2 \\ x+y = 3 \end{cases}$

Donc x et y sont les deux solutions de l'équation $(E) : x^2 - 3x + 2 = 0$

Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = 1$

Donc $x = 1$ et $y = 2$, d'où l'ensemble des solution de système (S) est $S = \{1, 2\}$

Propriété

Propriété caractéristique : $(\forall x > 0\,; \forall y > 0)\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Règle de calculs

1 $(\forall x > 0)\,; \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2 $(\forall x > 0)(\forall y > 0)\,; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

3 $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})\,; \ln(x^r) = r\ln(x)$

• Preuve

1 $(\forall x > 0)\,; \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Donc : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2 $(\forall x > 0)(\forall y > 0)\,; \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

Donc $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

3

- Montrons que : $(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,; \ln(x^n) = n\ln(x)$

  Pour $n = 0$ on a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(x) = 0$, donc $\ln(x^0) = 0 \times \ln(x)$

  D'où la proposition est vraie pour $n = 0$

  Supposons que $\ln(x^n) = n\ln(x)$ est vraie pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que

  $\ln(x^{n+1}) = (n+1)\ln(x)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Comme : $\ln(x^{n+1}) = \ln(x \times x^n) = \ln(x) + \ln(x^n) = \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x)$

Donc d'après le raisonnement par récurrence on a : $(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, \ln(x^n) = n\ln(x)$

- Montrons que : $(\forall x > 0)(\forall m \in \mathbb{Z})\,;\, \ln(x^m) = m\ln(x)$

  Supposons que $m \in \mathbb{Z}^-$, alors :

  $\ln(x^m) = \ln\left(\frac{1}{x^{-m}}\right) = -\ln(x^{-m}) = m\ln(x)$ (car : $-m \in \mathbb{N}$)

- Montrons que : $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \ln(x^r) = r\ln(x)$

  Supposons que $r = \frac{p}{q}$ (avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$), alors :

  $q\ln(x^r) = q\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \ln\left(\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\right) = \ln(x^p) = p\ln(x)$

  Donc $\ln(x^r) = r\ln(x)$

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $\ln lr\frac{x+2}{x-2} < \ln(x+1)$

b) $3\ln(x) \leq 2\ln(x)$

c) $\ln(x + 2\ln(x+2)) = \ln(x+1)$

d) $\ln(x)\ln(x+1) = \ln(x)\ln(2+x)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln(2) \\ \ln(2) + \ln(x+y) = \ln(\sqrt{3}+1) \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} \ln(x+y) = \ln(-x+3) \\ \ln(x+2y) = \ln(3) \end{cases}$$

3 On considère la suite $(u_n)_{n>1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\,;\, u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\,;\, u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b) Calculer en fonction de n ; $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(u_k)$

c) Déterminer $\lim S_n$

2 Étude et représentation graphique :

D'après la définition de la fonction $x \to \ln(x)$ on peut conclure que :

La fonction $x \to \ln(x)$ est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)$

Soit A un réel strictement positif. Comme la fonction $x \to \ln(x)$ est strictement croissante s

que $2 > 1$ alors : $\ln(2) > 0$ (car : $\ln(1) = 0$)

Par conséquent, le quotient : $\frac{A}{\ln(2)}$ est un réel strictement positif.

Soit n le plus petit entier naturel tel que : $n \geq \frac{A}{\ln(2)}$ (il suffit de prendre $n = E\left(\frac{A}{\ln(2)}\right) + 1$)

On multiplie par $\ln(2)$ on aura : $n\ln(2) \geq A \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq A$ Comme $x \to \ln(x)$ est une fonctio

croissante, alors pour tout x tel que $x \geq 2^n$ nous avons : $\ln(x) \geq \ln(2^n) \geq A$ Donc $(\forall A > 0)(\exists \beta > 0)(x \geq \beta \Rightarrow \ln(x) > A)$ avec : $(\beta = \ln(2^n)$ où $(\beta = E\left(\frac{A}{\ln(2)}\right) + 1)$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$

On pose $t = \frac{1}{x}$, alors : $x = \frac{1}{t}$ et $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t) = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, alors la courbe de la fonction $x \to \ln(x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

On considère la fonction f définie sur $[1, \sqrt{x}]$ par $f(t) = \ln(t)$, avec $x > 1$

On a f est continue sur $[1, \sqrt{x}]$, et dérivable sur $]1, \sqrt{x}[$

Théorème des accroissements finies $\exists c \in]1, \sqrt{x}[$ tel que $(\sqrt{x}-1)f'(c) = f(\sqrt{x}) - f(1)$

Donc $\frac{\sqrt{x}-1}{c} = \frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$, d'où $\frac{2(\sqrt{x}-1)}{c} = \ln(x)$, et puisque $1 < c < \sqrt{x}$

Alors $\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{c} < 2(\sqrt{x}-1)$ donc $\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}} < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc de la fonction $x \to \ln(x)$ admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

Tableau de variations

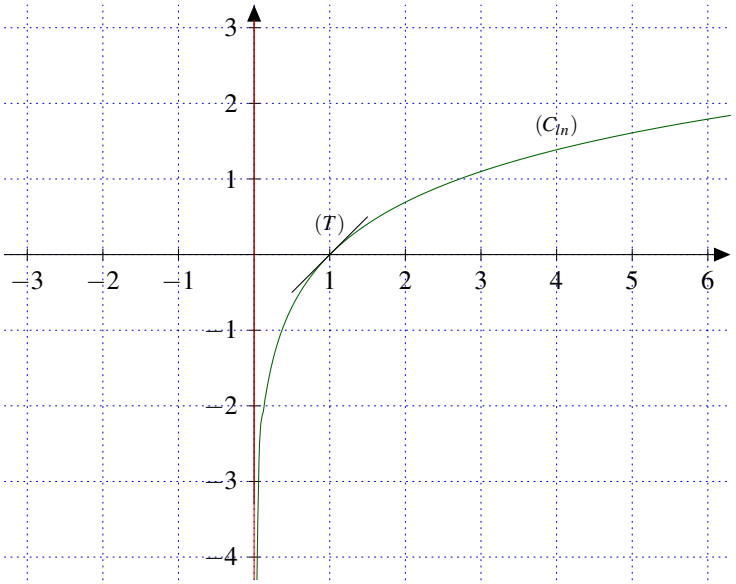
La fonction $x \to \ln(x)$ est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}$, d'où le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) $\ln(e) = 1$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

La courbe de la fonction ln

Yassine Ela

https://steinmath.com rday, tomorrow better than today



$(T) : y = x - 1$ est une droite tangente à la courbe $(C_{\ln})$ en $A(1,0)$

3 Dérivée de la fonction : $x \to \ln \ln u(x)$

Soient u une fonction dérivable, strictement positive sur un intervalle I, et v une fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $v(x) = \ln(x)$

Donc la fonction $v \circ u$ est bien définie et dérivable sur I et on a :

$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

T Théorème

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I alors la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I)\,;\, f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple

On considère le fonction f définie sur $I =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Comme la fonction $u : x \to \frac{x+1}{x-2}$ est strictement positive, et dérivable sur I, alors la fonction f est dérivable sur I et on a :

$(\forall x \in I)\,;\, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{\frac{x+1}{x-2}} = -\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

COROLAIRE

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I)\,;\, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Preuve

S En utilisant la formule suivante : $\begin{cases} f(x) = \ln(u(x)) & ; u(x) > 0 \\ f(x) = \ln(-u(x)) & ; u(x) < 0 \end{cases}$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \to \ln(|u(x)|) + c^{te}$

Application

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x-6}{x^2-12x+4}$
2. $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$
3. $g(x) = \tan(x)$
4. $u(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
5. $v(x) = \frac{7}{2x^2+x-3}$

4 Limites référentielles :

Propriété

1− $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

2− $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$

3− $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$; (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

4− $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

5− $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

6− $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$; (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

7− $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

8− $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

• Preuve

2− On pose $t = \frac{1}{x}$, alors $x = \frac{1}{t}$ et si $x \to 0^+$ on a : $t \to +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to +\infty} -\frac{\ln(t)}{t} = 0^-$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3− $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{n-1}(x\ln(x)) = 0^-$

6− $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0$

7− Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)$

On sait que f est dérivable en 1 et que : $f'(1)=1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$

8− On pose $t = x+1$, alors $x = t-1$ et si $x\to 0$ on a : $t\to 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1} = 1$

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$

On pose $t=\frac{1}{x}$, alors $x=\frac{1}{t}$ et si $x\to+\infty$ on a $t\to 0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right) = 0$

Car : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right) = 1$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x(x+1))}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x-1} + \dfrac{\ln(x+1)}{x-1}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t} = 0$ (on pose $t=x+1$, si $x\to+\infty$ on a $t\to+\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = 1$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x)}{x-1} = 0$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}\times\dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x}\times\dfrac{x+1}{x-1}$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x} = 1$ car : on pose $t=x^2+x$, alors si $x\to 0$ on a $t\to 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^2+x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t} = 1$

Et aussi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x-1} = -1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x}=-1$

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}\times\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+4x-5}$

Comme : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}=1$ (car : on pose $t=x^3+2x-2$ alors si $x\to 1$ on a $t\to 1$)

donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^3+2x-2-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln(t)}{t-1}=1$

Et aussi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+3)(x-1)}{(x+5)(x-1)}=\dfrac{5}{6}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3+2x-2)}{x^2+4x-5}=\dfrac{5}{6}$

Applicaton : 1

On considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\frac{lnx}{n}-\frac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$

2 Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$

3 Étudier les variations de f_n

4 En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique u_n

Applicaton : 2

Partie I

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=x-(x+1)ln(x+1)$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

2 Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g'(x)=-ln(x+1)$

3 En déduire que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g(x)\leq 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{ln(x+1)-x}{x}$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

avec $||\vec{i}||=2cm$ et $||\vec{j}||=2cm$

1 Étudier la continuité de f au point $x_0=0$:

2 Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ on pose $h(t)=t^2(ln(x+1)-x)-x^2(ln(t+1)-t)$

a Montrer que : $(\exists c\in]0,x[)\ h'(c)=0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

b En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+1)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

3 Étudier la dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

4 Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$, puis donner une interprétation géométrique de ces résultats.

5 a Montrer que : $\forall x x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[\,;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(x+1)}$

b Étudier les variations de f, puis dresser sa table de variations

6 Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

II Fonctions logarithmiques de base a

1 Définition et règles de calcul

a Définition

D **Définition**

Soit a un réel strictement positif et différents de 1

La fonction notée par $\log_a$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $(\forall x\in]0,+\infty[)\,;\ \log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

S'appelle : la fonction logarithmique de base a

Exemple

- Pour : $a=e$; on aura : $\log_e(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(e)}=\ln(x)$
- $\log_a(a)=\frac{\ln(a)}{\ln(a)}=1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

b Propriété et règles de calcul

Propriété

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction ln restent valables pour la fonction $\log_a$.

- $(\forall x>0)\ (\forall y>0)\,;\ \log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$
- $(\forall x>0)\,;\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$
- $(\forall x>0)\ (\forall y>0)\,;\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
- $(\forall x>0)\ (\forall r\in\mathbb{Q})\,;\ \log_a(x^r)=r\log_a(x)$

• Preuve

Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction $\log_a$ et les propriétés de la fonction ln

c La monotonie

Soit a un réel strictement positif et différents de 1

On considère la fonction f_a définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_a(x)=\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Comme la fonction $x\to\ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, alors la fonction $f$est dérivable sur $]0,+\infty[$ Donc $(\forall x\in]0,+\infty[)\,;\ f'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Si $a \in]0,1[$ alors $\ln(a) < 0$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, f'(x) < 0,$

Alors f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

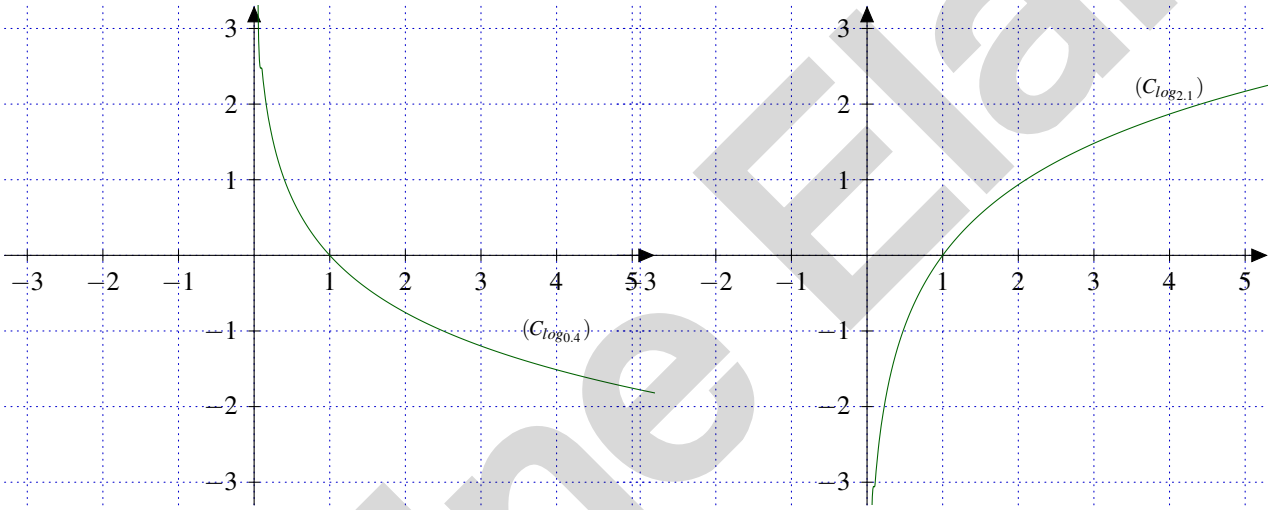
x	0		a		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

Si $a \in]1,+\infty$ alors $\ln(a) > 0$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, f'(x) > 0,$

Alors f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	0		1		a		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$



2 Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal

D **Définition**

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par log

$(\forall x \in]0,+\infty[)\,;\, \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Propriété

1. $\log(10) = 1$
2. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$
3. $(\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log(10^r) = r$
4. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
5. $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})\,;\, \log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Preuve

1 $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$; $(\log_a(a) = 1)$

2 $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})$; $\log(x) = r \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = r$

$\Leftrightarrow \ln(x) = r\ln(10)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(10^r)$

$\Leftrightarrow x = 10^r$

3 $(\forall r \in \mathbb{Q})$; $\log(10^r) = r\log(10) = r$

4 $(\forall x > 0)\ (\forall r \in \mathbb{Q})$; $\log(x) > r \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(10)} > r$

$\Leftrightarrow \ln(x) > r\ln(10)$; (car $\ln(10) > 0$)

$\Leftrightarrow \ln(x) > \ln(10^r)$

$\Leftrightarrow x > 10^r$; (car la fonction ln est strictement croissante)

Application

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x+1) = \log_{x+1}(x)$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\log_2(x) > \log_x(2)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today