Chapitre

Calcul Trigonométrique

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On optera pour la simplicité lors de la présentation de ce chapitre, en utilisant toute technique à la portée des élèves.** • **On utilisera le cercle trigonométrique pour résoudre une inéquation simple sur un intervalle de** $\mathbb{R}$	• **Maitriser les différentes formules de transformation.** • **Résoudre des équations et des inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution déquations et dinéquations fondamentales.** • **Représenter et lire les solutions dune équation ou dune inéquation sur le cercle trigonométrique.**

Les prés-requis	Les extensions
- Les lignes trigonométriques dans un cercle trigonométrique. - Equations et inéquations trigonométriques. - Les fonctions trigonométriques. - Produit scalaire et angles orientés. - Théorème de Thalès et Théorème de Pythagore. - Calcul Vectoriel et Projection. - Ordre et opérations - La proportionnalité.	- Produit scalaire, produit vectoriel et applications. - Les Fonctions Numériques. - Géométrie dans lespace - Les Suites Numériques. - Physique, Mécanique et Optique. - Dérivations et Intégration. - Limites et Equations Différentielles. - Nombres Complexes

Yassine Flamri

Avant propos

La trigonométrie (du grec *trigonos*, « triangulaire », et *métron*, « mesure ») est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles et des fonctions trigonométriques telles que sinus, cosinus, tangente.

Les applications de la trigonométrie sont extrêmement nombreuses. En particulier, elle est utilisée en astronomie et en navigation avec notamment la technique de triangulation. Les autres champs où la trigonométrie intervient sont : physique, électricité, électronique, mécanique, acoustique, optique, statistiques, économie, biologie, chimie, médecine, météorologie, géodésie, géographie, cartographie, cryptographie, informatique etc...

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations dÉgypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de lIndus, il y a plus de 4 000 ans. Il semblerait que les Babyloniens aient basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60.

L'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (-190 ; -120) construisit les premières tables trigonométriques sous la forme de tables de cordes : elles faisaient correspondre à chaque valeur de l'angle au centre (avec une division du cercle en 360ř), la longueur de la corde interceptée dans le cercle, pour un rayon fixe donné. Ce calcul correspond au double du sinus de l'angle moitié, et donne donc, d'une certaine façon, ce que nous appelons aujourd'hui une table de sinus. Toutefois, les tables d'Hipparque n'étant pas parvenues jusqu'à nous, elles ne nous sont connues que par le grec Ptolémée, qui les publia, vers l'an 150, avec leur mode de construction dans son Almageste. C'est ainsi qu'elles furent redécouvertes à la fin du Moyen Âge par Georg von Purbach et son élève Regiomontanus. On attribue à Ménélaos d'Alexandrie (fin du i^{er} siècle) des développements en trigonométrie sphérique, au moins partiellement présents dans l'Almageste et longtemps attribués à Ptolémée lui-même.

Vers l'an 400, est rédigé un traité indien d'astronomie, le Surya Siddhanta, qui s'inspire de l'astronomie grecque, mais qui apporte une innovation concernant la trigonométrie. Alors que les mathématiciens grecs associaient la mesure d'une corde à un arc, l'ouvrage préfère associer la demi-corde à un arc donné. Cela donnera naissance à la notion de sinus. Il en sera de même plus tard des mathématiciens arabes. Le mathématicien indien Âryabhata, en 499, donne une table des sinus et des cosinus. Il utilise **zya** pour sinus, **kotizya** pour cosinus et **otkram zya** pour l'inverse du sinus. Il introduit aussi le sinus verse.

Un autre mathématicien indien, Brahmagupta, utilise en 628 l'interpolation numérique pour calculer la valeur des sinus jusqu'au second ordre.

C'est dans le monde musulman que la trigonométrie prend le statut de discipline à part entière et se détache de l'astronomie.

Abu l-Wafa (940-998) simplifie l'Almageste de Ptolémée en remplaçant l'usage du théorème de Ptolémée (qu'il nomme méthode du quadrilatère et des six quantités) par des formules de trigonométrie comparables aux nôtres (sinus de la somme de deux arcs, par exemple). Omar Khayyam (1048-1131) combine l'utilisation de la trigonométrie et la théorie de l'approximation pour fournir des méthodes de résolutions d'équations algébriques par la géométrie. Des méthodes détaillées de constructions de tables de sinus et cosinus pour tous les angles sont écrites par le mathématicien Bhskara II en 1150. Il développe aussi la trigonométrie sphérique. Au $xiii^{e}$ siècle, Nasir al-Din Tusi, à la suite de Bhskara, est probablement

Yassine Elamri

un des premiers à considérer la trigonométrie comme une discipline distincte des mathématiques. Enfin, au xiv^e siècle, Al-Kachi réalise des tables de fonctions trigonométriques lors de ses études en astronomie.

En 1220, en Europe, Fibonacci propose une table trigonométrique dans sa Practica Geometriae, mais qui comporte malheureusement plusieurs erreurs.

La mise en place de mesures trigonométriques précises se développe vers le milieu du xv^e siècle, avec la traduction en latin des uvres de Ptolémée. Les pionniers en ce domaine sont Georg von Peuerbach et surtout son étudiant Regiomontanus. Ce dernier adopte la notion de sinus utilisée par les mathématiciens indiens et arabes. Il dresse une table des sinus avec un rayon de 600 000 unités, puis 10 000 000 d'unités et donne également une table des tangentes. Suivent au début du xvi^e siècle les traités d'Oronce Fine, Pedro Nunes et Joachim Rheticus. Ce dernier dresse une table trigonométrique pour un rayon de 1015 d'unités et avec un incrément de 10 secondes d'arc. Le mathématicien silésien Bartholomäus Pitiscus publie un travail remarquable sur la trigonométrie en 1595, dont le titre (Trigonometria) a donné son nom à la discipline. C'est le mathématicien flamand Adrien Romain qui introduit la notation moderne.

L'utilisation de rayons ayant comme mesure une puissance de 10 et le développement du calcul décimal à la fin du xvi^e, avec François Viète et Simon Stevin, amenèrent petit à petit à se ramener à un rayon unité et à introduire en tant que nombre et non plus en tant que rapport de deux longueurs.

Yassine Elamri

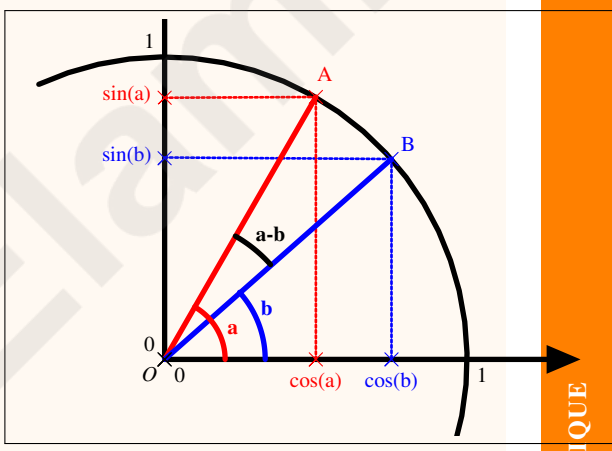
I Formules Trigonométriques

1 Formules daddition

Activité

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit $(\mathscr{C})$ un cercle trigonométrique de centre O et a et b deux réels.

Soient A et B deux points de $(\mathscr{C})$ tels que : $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)\equiv a\ [2\pi]$ et $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)\equiv b\ [2\pi]$



1. Montrer que : $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\equiv a-b\ [2\pi]$ et déduire que : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos(a-b)$.
2. Déterminer les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, puis calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos(a-b)$ en utilisant la formule analytique du produit scalaire.
3. Déduire que : $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$.
4. En déduire les formules suivantes :

- $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$
- $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$.
- $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$.

Remarquer que : $a+b=a-(-b)$ et $\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)$.

Proposition

$\forall a,b\in\mathbb{R}$; on a :

- $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$
- $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$
- $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$
- $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$

Application

⊛ Exprimons $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

- $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\frac{\pi}{4}.\cos x+\sin\frac{\pi}{4}.\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos x+\sin x\right)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}.\cos x-\cos\frac{\pi}{4}.\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos x-\sin x\right)$

Yassine Elamri

⊛ Calculons $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$:

- $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
- $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
- $\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice

Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin x=0$

Activité

1 Calculer : $\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}$ et $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

2 En déduire l'expression de $\tan(a-b)$ et $\tan(a+b)$.

Proposition

$\forall a,b\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ tels que : $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, on a :

- $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$
- $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

• Exemple

Calculons $\tan\frac{5\pi}{12}$:

On a $\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$

Yassine Elamri

2 Formules de duplication

Activité

1 En utilisant les formules d'addition, calculer : $\cos(a+a)$ et $\sin(a+a)$ et $\tan(a+a)$

2 En déduire l'expression de $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.

Proposition

$\forall a, b \in \mathbb{R}$; on a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin(2a) = 2\sin a.\cos a$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Application

⊛ Calculons $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$:

Remarquons que : $\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{4}$

Donc $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\Longrightarrow \left|\cos\dfrac{\pi}{8}\right| = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\left|\sin\dfrac{\pi}{8}\right| = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Comme $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ alors $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$

$\Longrightarrow \cos\dfrac{\pi}{8}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice

Soit x un élément de l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

Exercice

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$; $A(x) = \cos x.\cos 2x.\cos 4x$

1 Montrer que : $A(x)\times\sin x = \dfrac{1}{8}\sin 8x$

2 En déduire que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right).\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right).\cos\left(\dfrac{4\pi}{9}\right) = \dfrac{1}{8}$

Yassine Elamri

Proposition

- $\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}\right\}$ on a : $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
- $\forall x \in \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ Si $t = \tan\frac{x}{2}$ on a :
  - $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
  - $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Exercice

Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$

Exercice

Soit α un élément de lintervalle $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$. Montrer que : $\tan(3\alpha) = \frac{\tan^3(\alpha) - 3\tan(\alpha)}{3\tan^2(\alpha) - 1}$

II Transformation de produit et de somme

1 Transformation de produit en somme

Activité

1 A partir des formules d'addition, en posant : $p = a + b$ et $q = a - b$, calculer :

- $\cos a.\cos b$
- $\sin a.\sin b$
- $\sin a.\cos b$
- $\cos p + \cos q$
- $\sin q + \sin q$
- $\cos p - \cos q$
- $\sin q - \sin q$

Proposition

$\forall a, b \in \mathbb{R}$; on a :

- $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$
- $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$
- $\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

Yassine Elamri

2 Transformation de somme en produit

Proposition

$\forall p,q \in \mathbb{R}$; on a :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Application

⊛ Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2 x - \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}\left[\cos(2x)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 x - 1 - \frac{1}{2}\right)\\ &= \cos^2 x - 1 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Exercice

Soit ABC un triangle. On pose : $T = \sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C}$.

1 Montrer que : $\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} = 2\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right).\cos\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$

2 Montrer que : $T = 4\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right).\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right).\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$

Remarque

$\forall x \in \mathbb{R}$; on a :

x et $x+2k\pi / k \in \mathbb{Z}$	x et $\pi - x$	x et $\frac{\pi}{2} - x$
• $\sin(x+2k\pi) = \sin x$	• $\sin(\pi - x) = \sin x$	• $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
• $\cos(x+2k\pi) = \cos x$	• $\cos(\pi - x) = -\cos x$	• $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
• $\tan(x+2k\pi) = \tan x$	• $\tan(\pi - x) = -\tan x$	• $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

Yassine Elamri

x et $-x$	x et $\pi+x$	x et $\frac{\pi}{2}+x$
• $\sin(-x)=-\sin x$	• $\sin(\pi+x)=-\sin x$	• $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
• $\cos(-x)=\cos x$	• $\cos(\pi+x)=-\cos x$	• $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$
• $\tan(-x)=-\tan x$	• $\tan(\pi+x)=\tan x$	• $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$

III Equation du type : $a\cos x+b\sin x=c$

Activité

1 Montrer que : $\forall a,b\in\mathbb{R}$; $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

2 Résoudre l'équation : $(E):a\cos x+b\sin x=r$ où $r\in\mathbb{R}$.

Proposition

$\forall a,b\in\mathbb{R}^*$; $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, tel que :

- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha.\cos x+\sin\alpha.\sin x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$.
- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\beta.\cos x+\cos\beta.\sin x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\beta)$.

• Exemple

On a $\sqrt{3}.\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos x+\frac{1}{2}.\sin x\right)$

$=2\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{6}+\sin x.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

Yassine Elamri