Chapitre

Produit scalaire dans le plan : Étude analytique

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
► L'étude analytique du cercle est un domaine riche pour l'application de l'analytique du produit scalaire surtout ce qui concerne la distance et l'orthogonalité.A cette fin, on mettre en évidence le rôle de la méthode analytique dans la résolution de certains problèmes géométriques ► On utilisera le produit scalaire pour déterminer une équation cartésienne d'un cercle	► Exprimer le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites ► Utiliser le produit scalaire pour calculer des distances, des aires et des mesures d'angles ► Reconnaître l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$ ► Déterminer le centre et le rayon d'un cercle défini à l'aide d'une équation cartésienne ► Passer d'un équation cartésienne à une représentation paramétrique et inversement ► Utiliser l'analytique du produit scalaire pour résoudre des problèmes géométriques et algébriques

Les prés-requis	Les extensions
.	

Yassine Flamri

Avant propos

La création de la géométrie analytique est l'uvre de Descartes, et à un titre moindre de Fermat. Les idées centrales de Descartes sont celles de repère et de projection orthogonale. Cette théorie permet de concevoir l'espace géométrique comme une collection de points représentés chacun par trois nombres.
Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparait cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions et chez Grassmann. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à laide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire.
Source : https://fr.wikipedia.org

I Étude analytique du produit scalaire

Dans tout ce qui suit, le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

1 Expression analytique du produit scalaire

Activité

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs dans le plan tels que : $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$. Le couple $(\vec{i};\vec{j})$ est appelé une base orthonormée. Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan.

1 -a) Développer le produit scalaire : $(x\vec{i}+y\vec{j})\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$.

b) En déduire que : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. On considère les vecteurs : $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ et $\vec{w}=(2m+1)\vec{i}+3\vec{j}$ avec $m\in\mathbb{R}$.

2 -a) Calculer les produits scalaires suivants : $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{w}$; $\vec{v}.\vec{w}$.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

Propriété

Soit $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan.Alors :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$; $\vec{i}.\vec{u}=x$; $\vec{j}.\vec{u}=y$

Application

1 Soit les vecteurs : $\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{i}+5\vec{j}$ et $\vec{v}=-4\vec{i}+7\vec{j}$.Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

2 Soient les vecteurs : $\vec{u}=(2m-1)\vec{i}+4m\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}$ ou $m\in\mathbb{R}$. Déterminer m sachant que $\vec{u}\perp\vec{v}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Expression analytique de la norme d'un vecteur et de la distance de deux points

Propriété

- Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur, alors sa norme est : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$
- Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ sont deux points du plan, alors : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Application

1 On considère les vecteurs : $\vec{u} = 2\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{v}(\sqrt{5}-2;\sqrt{5}+2)$; $\vec{w} = (2m-1)\vec{i}+3\vec{j}$ ou $m \in \mathbb{R}$

- Calculer ce qui suit : $||\vec{u}||$; $||\vec{v}||$; $||\vec{w}||$
- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $||\vec{w}|| = \sqrt{10}$

2 On considère dans le plan les points suivants : $A(0;3)$; $B(-1;5)$; $C(2m+1;m-1)$ ou $m \in \mathbb{R}$

- Calculer les distances suivantes : AB ; AC ; BC
- Est-ce-que le triangle ABC peut être isocèle ?Justifier la réponse

3 Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.Alors on a :

- L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||.||\vec{v}||$
- L'égalité $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$ aura lieu si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

EXEMPLES

- Dans une base orthonormée $(\vec{i};\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(a;b)$.On a : $||\vec{u}||^2.||\vec{v}||^2 = (x^2+y^2)(a^2+b^2) = x^2a^2+y^2b^2x^2b^2+y^2b^2 = (xa+yb)^2+(xb-ya)^2$ c'est-à-dire : $||\vec{u}||^2.||\vec{v}||^2 = (vecu.vecv)^2+(xb-ya)^2$ (*)
  Il s'ensuit donc que $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq ||\vec{u}||^2.||\vec{v}||^2$, c'est-à-dire $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||.||\vec{v}||$ (car $(xb-ya)^2 \geq 0$)
- De l'égalité $(*)$, on en déduite que $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$ est équivalent à $xb-ya = 0$, c'est-à-dire $det(\vec{u};\vec{v}) = 0$, ce qui signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque : On peut aussi utiliser la formule $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v})$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

4 Inégalité triangulaire

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.Alors on a :

- L'inégalité triangulaire : $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$
- L'égalité $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ aura lieu si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et ont le même sens

Exemples

- De l'inégalité de Cauchy - Schwarz, on en déduit que : $\vec{u}.\vec{v} \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. et puisque $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$, alors : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, ce qui donne $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$ et par suite : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- L'égalité $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ aura lieu si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$. D'après la proposition précédente, il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$ ou $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$. Si par exemple $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$, on trouve : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{u}) = |\alpha|\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\|$, ce qui donne $|\alpha| = \alpha$, et donc $\alpha \geq 0$.

Application

1 En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Montrer que : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2) \quad x + y \leq (1+x^2)(1+y^2)$

2 Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que : $(a-c)^2 + (b-d)^2 \geq \frac{(ad-bc)^2}{a^2+b^2}$

3 Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

II Produit scalaire et angle

Dans tout ce qui suit, le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

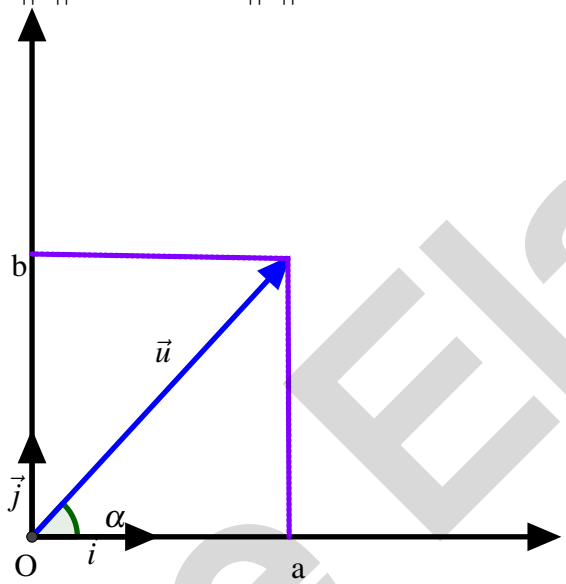
1 Repérage polaire d'un vecteur

Propriété

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan

Si α désigne une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{i};\vec{u}})$, alors : $\vec{u} = ||\vec{u}||.[(\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}]$

Donc $a = ||\vec{u}||.\cos\alpha$ et $b = ||\vec{u}||.\sin\alpha$



2 Expression de $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et $\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Propriété

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.On a alors les formules suivantes :

$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin\theta = \frac{det(\vec{u};\vec{v})}{||\vec{u}||.||\vec{v}||} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

1 Calculer $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ et $\sin(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ dans les cas suivants :

a- $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$; b- $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=(\sqrt{3}-1)\vec{i}+(\sqrt{3}+1)\vec{j}$

2 On considère les points : $A(1;3)$ et $B(3;1)$ et $C(-3;-1)$. Calculer $\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ et $\sin(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

3 Aire d'un triangle

Propriété

L'aire du triangle ABC est : $S=\frac{1}{2}|det(\vec{AB};\vec{AC})|$

Remarque :

On a aussi : $S=\frac{1}{2}|det(\vec{BA};\vec{BC})|=S=\frac{1}{2}|det(\vec{CA};\vec{CB})|$

III Étude analytique de la droite dans le plan

1 vecteur normal à une droite

Définition

Soit (D) une droite du plan Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) est appelé vecteur normal à la droite (D)

Propriété

Soit(D) une droite dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont deux vecteurs normaux sur(D)), alors ils sont colinéaires.
- Si $\vec{u}(\alpha;\beta)$ est un vecteur directeur de (D), alors le vecteur $\vec{n}(-\beta;\alpha)$ est normal à (D)
- Si une équation cartésienne de(D) est $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$, alors le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est normal à la droite (D).

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

1 On a $\vec{n}(2;-3)$ est un vecteur normal à la droite (D) d'équation : $2x-3y=0$

2 On a $\vec{n}'(0;1)$ est un vecteur normal à la droite (Δ) d'équation : $y-3=0$.

3 On considère la droite (Δ) d'équation cartésienne : $2x-y+1=0$. Déterminons la valeur du paramètre réel m pour que le vecteur $\vec{n}(m;1-m)$ soit normal à la droite (Δ) : On a $\vec{u}(1;2)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ). Par conséquent :

$$\vec{u}\perp\vec{n}\Leftrightarrow m+2(1-m)=0\Leftrightarrow 2-m=0\Leftrightarrow m=2$$

Par suite, $\vec{n}$ est un vecteur normal à (Δ) si et seulement si $m=2$.

Application

1 On considère les droites : $(D):5x+2y-3=0$ et $(D'):y=2x-3$

Les droites (D) et (D') sont-elles orthogonales ? Justifier votre réponses

2 Déterminer un vecteur normal à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

a-$(D):x+y+3=0$; b- $(D):y=x$; c-$(D):x=5$; d- $(D):2y-1=0$

2 Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal à cette droite

Propriété

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point du plan $\mathscr{P}$

- L'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est la droite (D)passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$
- Si $A(x_A;y_A)$ et $\vec{n}$, alors une équation cartésienne de la droite (D) est :

$(D):a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

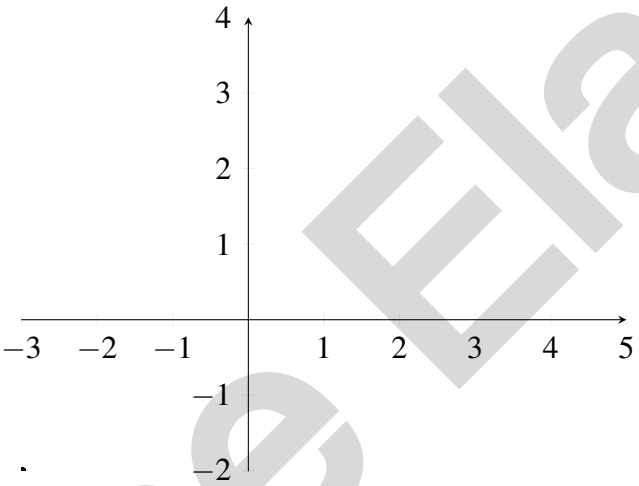
3 Condition de perpendicularité de deux droites

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites du plan $\mathscr{P}$

- $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont deux vecteurs normaux respectivement aux droites (D) et (D'), alors : $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'} \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$
  - Si les droites (D) et (D') sont définies respectivement par les équations cartésiennes :

$$ax+by+c=0 \text{ et } a'x+b'y+c'=0 \text{ alors : } (D) \perp (D') \Leftrightarrow aa'+bb'=0$$



Application

1. On considère la droite $(D) : 5x+2y-3=0$ et $(D') : y=2x-3$. Les droites (D) et (D') sont-elles perpendiculaires ?Justifier votre réponse
2. On considère les droites $(\Delta_1) : (2m-3)x-5y+11=0$ et $(\Delta'_1) : 2x+3y+5=0$ ou $m \in \mathbb{R}$ Déterminer la valeur de m pour que les droites (Δ_1) et (Δ'_1) soient perpendiculaire
3. On considère les points : $A(1;2)$; $B(-3;-6)$; $C(0;1)$; $D(2;0)$.Montrer que : $(AB) \perp (CD)$

Yassine Elamri

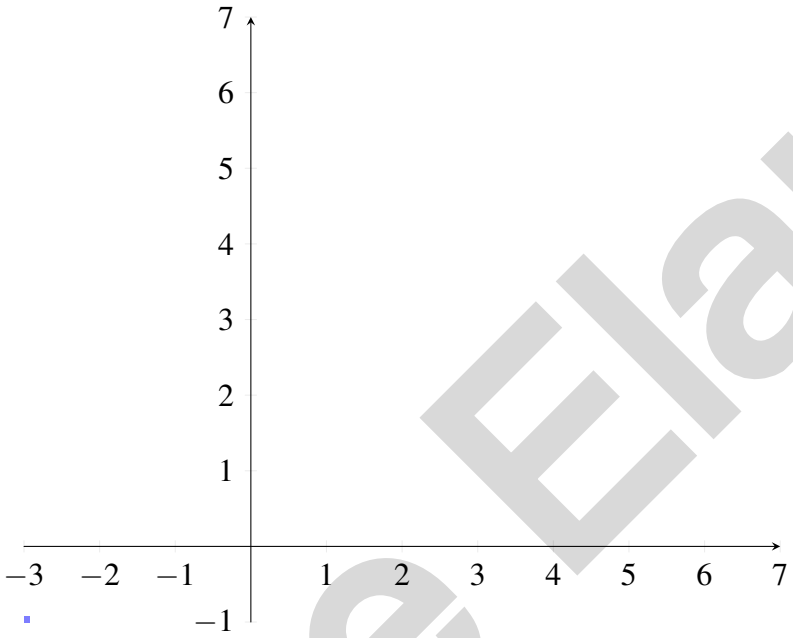
Today better than yesterday, tomorrow better than today

4 Distance d'un point à une droite

Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation : $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ et $Ax_A;y_A)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite $(\mathscr{D})$ est donnée par : $d(A;(\mathscr{D}))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



• Exemple

la distance du point $A(-1;3)$ à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $3x+4y-7=0$ est : $d(A;(\mathscr{D}))=\frac{|-3+12-7|}{\sqrt{6+9}}=\frac{2}{5}$

Application

1 Calculer la distance du point A à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

a -$A(2;3)$ et $(D):2x-5y+4=0$; $b-A(-2;3)$ et $(D):x-3y+5=0$

c- $A(-4;3)$ et $(D):3x-5=0$; $d-A(0;1)$ et $(D):y=-2x+3$

2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points : $A(1;-1)$; $B(-1;2)$; $C(-3;-2)$

a -Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

b - Calculer $d(C;(AB))$ puis en déduire l'aire du triangle ABC

Déterminer le couple de coordonnées du point H projeté orthogonal du point C sur la droite (AB)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

IV Équation cartésienne d'un cercle

Dans tout ce qui suit, le plan P rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

1 Le cercle

Définition

Soit Ω un point du plan P et R un réel positif.

Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que : $\Omega M = R$.On le note $\mathscr{C}(\Omega;R)$.On a alors :$M \in \mathscr{C}(\Omega;R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

2 Équation cartésienne d'un cercle

Propriété

Une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R $(R \geq 0)$ est :

$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ que l'on peut écrire : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ où $c = a^2+b^2-R^2$

• Exemple

1 Déterminons une équation du cercle (C_1) de centre $\Omega_1(-1;2)$ et de rayon $R_1 = 3$:

Soit $M(x;y)$ un point du plan.On a : $M(x;y) \in (C_1) \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 = 9$ ce qui donne :

$(C_1) : x^2+y^2+2x-4y-4=0$

2 Déterminons une équation du cercle (C_2) de centre $\Omega_1(-3;1)$ et passant par $A(-1;2)$:

Le rayon du cercle (C_2) est : $R_2 = A\Omega_2 = \sqrt{(-3+1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{5}$

Soit $M(x;y)$ un point du plan.On a : $M(x;y) \in (C_2) \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2 = \sqrt{5}$

Ce qui donne $(C_2) : x^2+y^2+6x-2y+5=0$

Application

1 Écrire une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et de rayon R dans chacun des cas suivants :

a - $\Omega(2;4)$ et $R=3$; b - $\Omega(-\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ et $R=2\sqrt{2}$; c - $\Omega(-1;3)$ et $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 Écrire une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω et passant le point A dans chacun

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

des cas suivants :

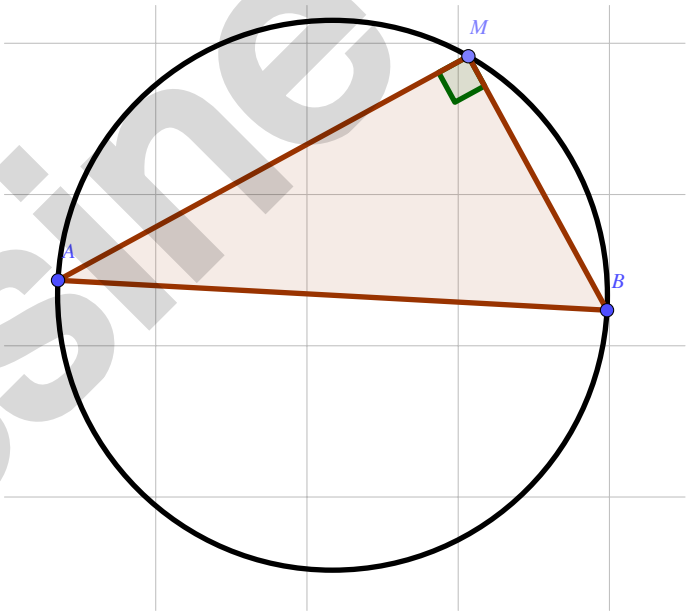
a - $\Omega(2;0)$ et $A(2;4)$; b - $\Omega(1;2)$ et $A(4;-2)$; c - $\Omega(-2;-3)$ et $A(2;-1)$

3 Équation d'un cercle défini par l'un de ses diamètre

Propriété

Soit A et B deux points distincts dans le plan $\mathscr{P}$

- L'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.Le centre du $(\mathscr{C})$ est le point Ω milieu du segment $[AB]$ et son rayon est $R=\frac{AB}{2}$
- Si $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $M(x;y)$, alors une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ est : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$
  Autrement dit : $x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+(x_A.x_B+y_A.y_B)=0$



• Exemple

On considère les points $A(1;2)$ et $B(-3;2)$.Déterminons l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$:

Soit $M(x;y)$ un point du plan $\mathscr{P}$.Alors on a : $M\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow(x-1)(x+3)(y-2)(y-$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$1) = 0$

Par suite : $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$

Application

Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ dans chacun des cas suivants :

a - $A(1;3)$ et $B(2;1)$; b - $A(-2;4)$ et $B(2;3)$; c - $A(-3;1)$ et $B(2;5)$

4 Équation d'un cercle défini par trois points non alignés

Propriété

Par trois points non alignés A,B et C passe un seul cercle $(\mathscr{C})$ de centre Ω le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC, et de rayon $R = \Omega A$

Ce cercle est appelé le cercle circonscrit au triangle ABC

• Exemple

1 Déterminons une équation du cercle circonscrit($\mathscr{C}$) au triangle ABC tel que :

$$A(2;3) \quad ; \quad B(0;1) \quad ; \quad C(-4;5)$$

Soit $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.

- Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$,donc(Δ) est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Soit $M(x;y)$ un point du plan. On a $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$, d'où :

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) - 2(y-2) = 0$$

Par conséquent : $(\Delta) : x + y - 3 = 0$

- Soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$, donc (Δ') est la droite passant par J et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$. Soit $M(x;y)$ un point du plan. On a $\overrightarrow{AC}(-6;2)$, d'où :

$$M \in (\Delta') \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -6(x+1) + 2(y-4) = 0$$

Par conséquent : $(\Delta') : 3x - y + 7 = 0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

- On sait que le centre Ω de cercle($\mathscr{C}$) est le point d'intersection de(Δ) et (Δ'), le couple $(x;y)$ des coordonnées de Ω est solution du système : $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 3x-y+7=0 \end{cases}$ Ce système admet pour seule solution $(-1;4)$, donc $\Omega(-1;4)$ et le rayon de cercle($\mathscr{C}$) est :

$$R = A\Omega = \sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2} = \sqrt{10}$$

Par conséquent, une équation cartésienne du cercle($\mathscr{C}$) est : $(x+1)^2+(y-4)^2=10$ ou encore :

$$(C) : x^2+y^2+2x-8y+7=0$$

2 Déterminons une équation du cercle circonscrit(Γ) au triangle OEF tel que : $E(5;2)$ et $F(2;4)$ Une équation du cercle (Γ) s'écrit : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ où $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$. et on a :

$$O(0;0)\in(\Gamma)\Leftrightarrow c=0; E\in(\Gamma)\Leftrightarrow 25+4-10a-4b=0; F\in(\Gamma)\Leftrightarrow 4+16-4a-8b=0$$

On obtient alors le système suivant : $\begin{cases} 10a+4b=29 \\ a+2b=5 \\ c=0 \end{cases}$, ce qui donne : $\begin{cases} a=\frac{19}{8} \\ c=0 \\ b=\frac{21}{16} \end{cases}$ Par suite, une équation cartésienne de (Γ) est : $x^2+y^2-\frac{19}{4}x-\frac{21}{8}y=0$

Application

Déterminer une équation du cercle circonscrit($\mathscr{C}$) au triangle ABC dans les deux cas suivants : a) $A(2;1)$ et $B(4;-1)$ et $C(0;3)$; b) $A(3;-1)$ et $B(5;3)$ et $C(1;1)$

V Représentation paramétrique d'un cercle

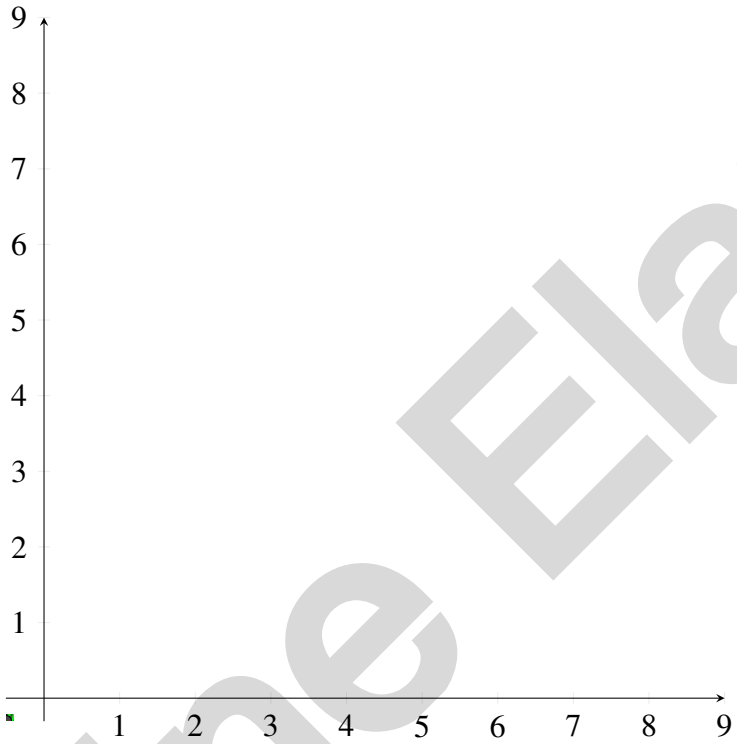
Dans tout ce qui suit, le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$ Ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle($\mathscr{C}$)



• Exemple

1 On considère le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation cartésienne : $x^2+y^2-2x+4y-11=0$

On a : $x^2+y^2-2x+4y-11=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4-11=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=16$

Par conséquent, $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $R=4$

Par suite, une représentation paramétrique du cercle $(\mathscr{C})$ est donnée par : $\begin{cases} x = 1+4\cos\theta \\ y = -2+4\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

2 Déterminons l'ensemble (Γ) des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x = -1+2\cos\theta \\ y = 3+2\sin\theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On a : $\begin{cases} x=-1+2\cos\theta \\ y=3+2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$; donc : $\begin{cases} x+1=2\cos\theta \\ y-3=2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$. D'où :

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta=4\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=4$$

Par suite : $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ est une équation du cercle (Γ) de centre $\Omega(-1;3)$ et de rayon $R=2$.

Application

1 Donner une représentation paramétrique du cercle($\mathscr{C}$) dans les cas suivants :

a) $x^2+y^2-2x+6y-6=0$; b) $x^2+y^2+4x-16=0$; c) $x^2+y^2+6x-8y+23=0$

2 Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ du plan tels que : $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=4+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

3 Déterminer une équation cartésienne du cercle($\mathscr{E}$) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+3\cos t \\ y=-1+3\sin t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

VI Ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Dans tout ce qui suit, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit a,b et c trois réels. On considère l'ensemble((Γ) défini par :

$$(\Gamma)=\left\{M(x;y)/x^2+y^2+ax+by+c=0\right\}$$

Solt $M(x;y)$ un point du plan. On a donc :

$$\begin{aligned} M\in(\Gamma) &\Leftrightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4} \end{aligned}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On désigne par Ω le point du plan de coordonnées $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$. Il en résulte donc :

$$M(x;y)\in(\Gamma)\Leftrightarrow \Omega M^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}\quad(*)$$

L'égalité(*) mène à la discussion suivante :

- Si $a^2+b^2-4c>0$ alors l'égalité(*) devient : $\Omega M=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$. Dans ce cas, (Γ)est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$.

- Si $a^2+b^2-4c=0$ alors l'égalité(*) devient : $\Omega M=0$, c'est-à-dire $M=\Omega$. Ainsi : $(\Gamma)=\{\Omega\}$. - Si $a^2+b^2-4c<0$ alors l'égalité(*) est fausse. Par conséquent : $(\Gamma)=\varnothing$. On a donc montré le résultat suivant :

Propriété

Soit(Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan $(\mathscr{P})$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
où $(a;b;c)\in\mathbf{R}^3$ et on pose : $k=a^2+b^2-4c$.

- Si $k<0$, alors l'ensemble (Γ) est vide : $(\Gamma)=\varnothing$.
- Si$k=0$, alors l'ensemble (Γ) est un singleton : $(\Gamma)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$.
- Si $k>0$, alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{k}}{2}$.

• Exemple

1 Soit($\mathscr{C}$) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan $\mathscr{P}$ tels que : $x^2+y^2-2x+3y=0$

En posant : $a=-2$ et $b=3$ et $c=0$, on obtient : $a^2+b^2-4c=4+9-0=13>0$. Par conséquent, ($\mathscr{C}$) est un cercle. Déterminons son centre et son rayon :

- Le centre est $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$, ce qui donne : $\Omega\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.
- Le rayon est : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

2 Soit($\mathscr{C}$) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan 9 tels que : $x^2+y^2+3x-7y+15=0$.

On a : $x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ et $y^2-7y=\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$

Par conséquent : $M(x;y)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+15=0$

Ce qui donne : $M(x;y)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$, Par suite : $(\mathscr{C})=\varnothing$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Déterminer l'ensemble (E) des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation cartésienne correspondante à chaque des cas suivants :

$a-)\ x^2+y^2+2x-4y+2=0$; $b_)\ x^2+y^2-12x+14y+85=0$; $c-)\ x^2+y^2+8x-6y+27=0$; $d-)\ x^2+y^2+\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{24}{5}=0$; $e-)\ x^2+y^2-8x-12=0$; $f-)\ x^2+y^2-6x+6y+18=0$

VII Intérieur et extérieur d'un cercle

Dans tout ce qui suit, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition

Soit$(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon R avec $R>0$ et M un point du plan $\mathscr{P}$.

- Le point M est sur le cercle$(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M=R$.
- Le point M est à l'intérieur du cercle$(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M<R$.
- Le point M est à l'extérieur du cercle$(\mathscr{C})$ si et seulement si : $\Omega M>R$.

Propriété

Soit$(\mathscr{C})$ le cercle d'équation cartésienne : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$. Pour tout point $M(x_0;y_0)$ du plan :

- M est un point du cercle$(\mathscr{C})$ si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c=0$.
- M est à I' intérieur du cercle$(\mathscr{C})$ si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c<0$.
- M est à l'extérieur du cercle$(\mathscr{C})$ si et seulement *si* : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c>0$.

Ainsi, le cercle $(\mathscr{C})$ détermine trois parties disjointes dans le plan $\mathscr{P}$.

• Exemple

1 Soit$(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $R=3$.

Déterminons la position des points $A(3;-1)$ et $B(0;1)$ par rapport au cercle $(\mathscr{C})$:

On a : $\Omega=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=5$ et $\Omega B=\sqrt{(0+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$

- Puisque $\Omega A>R$ alors le point A est à l'extérieur du cercle$(\mathscr{C})$.

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

- Puisque $\Omega B < R$ alors le point B est à l'intérieur du cercle($\mathscr{C}$).

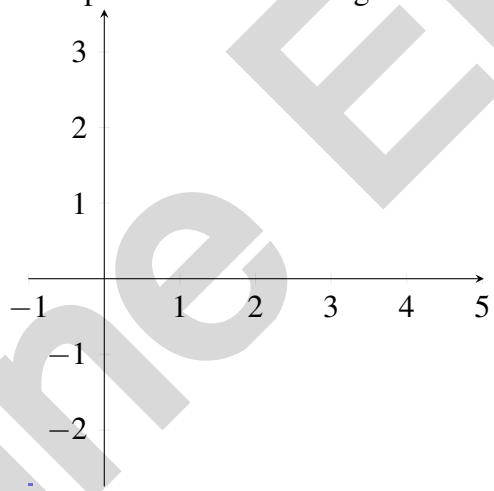
2 Résolvons graphiquement le système (S) suivant : $(x;y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x^2+y^2-4x<0 \\ x-y-1>0 \end{cases}$

- L'inéquation $x^2+y^2-4x<0$ est équivalente à : $(x-2)^2+y^2-4<0$ (1). Soit($\mathscr{C}$) le cercle d'équation cartésienne : $(x-2)^2+y^2=4$.

Les solutions de l'inéquation (1) sont les couples de coordonnées des points intérieurs du cercle($\mathscr{C}$).

- Les solutions de l'inéquation $x-y-1>0$ sont les couples de coordonnées des points du plan situés en dessous de la droite (Δ) d'équation $x-y-1=0$.

- L'ensemble solution de (S) est l'ensemble des couples $(x;y)$ coordonnées des points appartenant à la partie colorée de la figure.



Application

1 Déterminer la position du point A par rapport au cercle(Q)dans chacun des cas suivants : a) ($\mathscr{Q}$) le cercle de centre $\Omega(2;3)$ et de rayon $R=1$ et le point $A(-1;2)$. b) ( ) : $x^2+y^2-2x+4y=0$ et le point $A(0;1)$. c) ($\mathscr{C}$) : $\begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=1+2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbf{R})$ et le point $A(2;1)$.

2 a) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$$x^2+y^2+2x-6y+9\geq 0 \quad ; \quad x^2+y^2+2y-3<0 \quad ; \quad x^2+y^2<4$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

b) Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

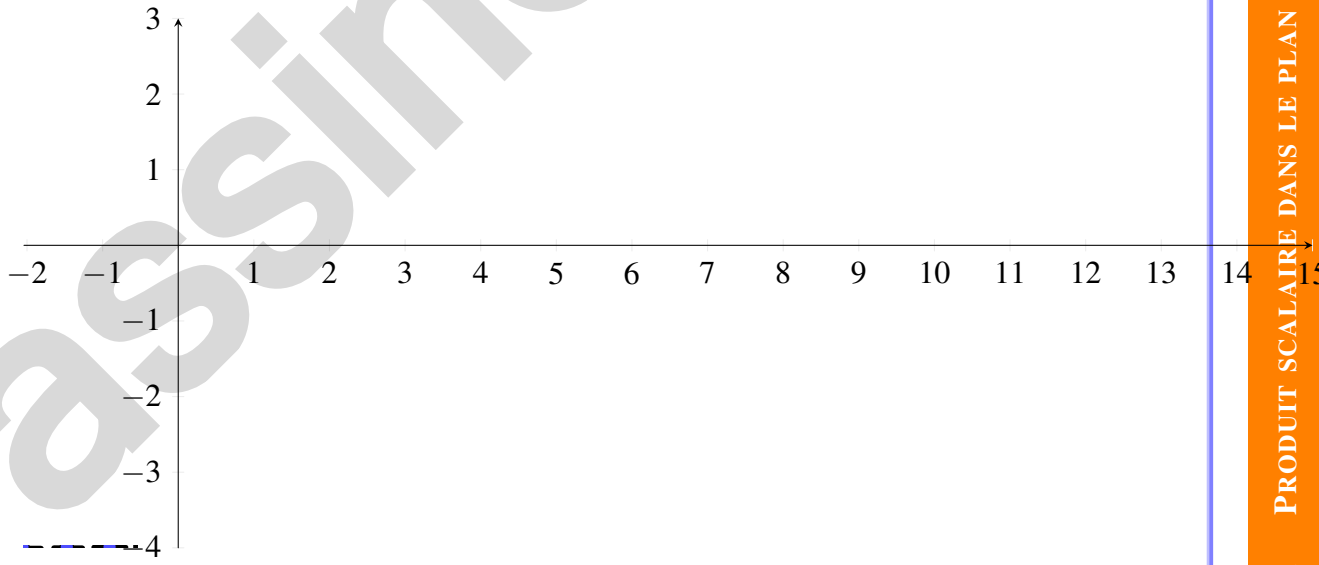
$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x-y>0 \end{cases} ; \begin{cases} x^2+y^2-x-2y-\frac{11}{4}\geq 0 \\ x+2y-3<0 \end{cases} ; \begin{cases} x^2+y^2+10x-4y+25<0 \\ x+2y-3>0 \\ 3x+y+11\leq 0 \end{cases}$$

VIII Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Propriété

Soit($(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon R et (D) une droite dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé.

- Si $d(\Omega;(D))>R$ alors l'intersection de(D) et($\mathscr{C}$) est vide : $(D)\cap(\mathscr{C})=\emptyset$
- Si $d(\Omega;(D))=R$, alors l'intersection de(D) et($\mathscr{C}$) est le singleton $\{H\}$ où H est le point de contact (ou de tangente) de la droite (D) et du cercle ($(\mathscr{C})$
- Si $d(\Omega;(D))<R$ alors l'intersection de(D) et($\mathscr{C}$) est un bipoint $A;B$



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

1 Pour étudier et déterminer l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du cercle $(\mathscr{C})$ tels que : On résout le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ x^2+(-x+3)^2-2x+4(-x+3)-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases}$$

L'équation $x^2-6x+5=0$ admet deux solutions distinctes qui sont : $x_1=1$ et $x_2=5$. Par conséquent : $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$. Ainsi, la droite(Ø) coupe le cercle($\mathscr{C}$) en deux points qui sont : $A(1;2)$ et $B(5;-2)$.

2 Déterminons une équation cartésienne du cercle (Γ) de centre $\Omega(-1;1)$ et tangent à la droite (Δ) d'équation $x+y+2=0$: Puisque la droite (Δ) est tangent à (Γ), alors son rayon est : $R=d(\Omega;(\Delta))=\frac{|-1+1+2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$. Soit $M(x;y)$ un point du plan. On a donc :

$$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-2y=0$$

Par suite : $(\Gamma): x^2+y^2+2x-2y=0$

Application

Étudier l'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

$a-)$ $(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x+2y=0$ et $(\mathscr{D}): 2x-y=0$.

$b-)$ $(\mathscr{C}): (x+2)^2+(y+2)^2=2$ et $(\mathscr{D}): x-y-2=0$.

$c-)$ $(\mathscr{C}): x^2+y^2-2x+4y-11=0$ et $(\mathscr{D}): x+y-3=0$.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

IX Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

Propriété

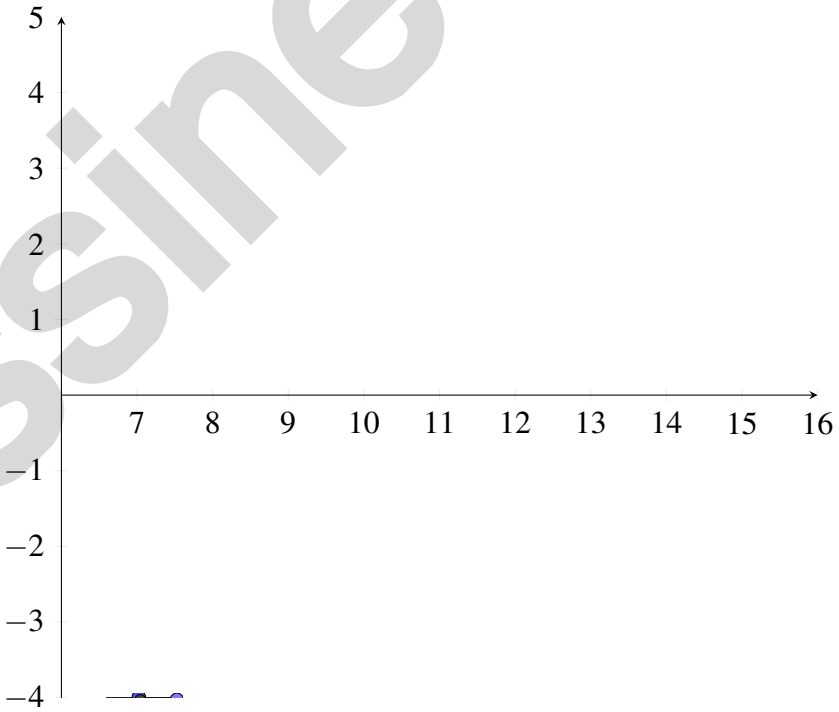
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon R, $A(x_0;y_0)$ un point du cercle $(\mathscr{C})$ et (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point A.

- La droite (T) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $\overrightarrow{A\Omega}\cdot\overrightarrow{AM}=0$
- Si le cercle $(\mathscr{C})$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

alors une équation de la tangente (T) est donnée par :

$$(T): xx_0+yy_0+\frac{1}{2}a(x+x_0)+\frac{1}{2}b(y+y_0)+c=0$$



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

EXEMPLES

Soit (T) la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point A. On a évidemment : $M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
Puisque le cercle $(\mathscr{C})$ admet une équation cartésienne de la forme : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ alors : $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ et $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$. Il s'ensuit donc :

$$\begin{aligned}
M \in (T) &\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{a}{2}-x_0\right)(x-x_0)+\left(-\frac{b}{2}-y_0\right)(y-y_0)=0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{a}{2}x+\frac{a}{2}x_0+x_0^2-x_0x-\frac{b}{2}y+\frac{b}{2}y_0+y_0^2-y_0y=0 \\
&\Leftrightarrow xx_0+yy_0+\frac{1}{2}a(x+x_0)+\frac{1}{2}b(y+y_0)=x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0=-c \\
&\Leftrightarrow xx_0+yy_0+\frac{1}{2}a(x+x_0)+\frac{1}{2}b(y+y_0)+c=0
\end{aligned}$$

• Exemple

On considère le cercle $(\mathscr{C})$ d'équation cartésienne : $x^2+y^2-6x+2y+5=0$ et $A(1;-2)$. On a : $x_A^2+y_A^2-6x_A+2y_A+5=1+4-6-4+5=0$, donc : $A \in (\mathscr{C})$. Soit $M(x;y)$ un point du plan. Une équation de la tangente (T) au cercle $(\mathscr{C})$ au point A est : $(T): x-2y-\frac{6}{2}(x+1)+\frac{2}{2}(y-2)+5=0$.
Par suite : $(T): 2x+y=0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today