Chapitre

généralité sur les fonction

Cours TCL

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
► Renforcer les acquis des élèves. ► Approcher le concept de la fonction numérique et sa représentation graphique. ► Résoudre divers problèmes tout en tenant compte des minimales et maximales d'une fonction.	► Identifier la variable et son ensemble de définitions pour une fonction définie par un tableau de données, une courbe ou une formule. ► Lire limage dun nombre et déterminer-en le nombre de ses images grâce à la représentation graphique de la fonction. ► Conclure les variations de fonction ou les valeurs maximales et minimales de la représentation graphique. ► Utiliser la représentation graphique pour résoudre certaines équations et inéquations.

Les prés-requis	Les extensions
► Notion d'ensemble. ► Applications linéaires et application affine. ► Fractions rationnelles.	► Étude des fonctions numériques ► Les limites dune fonction ► Dérivation et étude des fonctions

Yassine Elamri

I Fonction numérique dune variable réelle

Activité

On considère un rectangle de longueur $(x-1)cm$ et de largeur $(x-2)cm$ tel que x un réel supérieur strictement à 2.
On désigne par $f(x)$ la surface de ce rectangle.

1. Déterminer lexpression de $f(x)$
2. Déterminer la surface du rectangle si $x=2$ et si $x=4$
3. Déterminer les valeurs possibles de x si $f(x)=8$ et si $f(x)=12$

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$
On appelle fonction numérique, quon note f toute relation qui a associée chaque nombre réel x de D par un seul nombre réel y quon note $\begin{array}{ccccc} f & : & D & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \text{f(x)=y} \end{array}$

- $f(x)=y$ Sappelle **limage** de par la fonction f
- Le nombre x sappelle **antécédent** de y par la fonction .

• Exemple

On considère une fonction numérique définie par $f(x)=2x^2-5$
Déterminer les images de 1 ; -2 et 3 par la fonction f
Déterminer les antécédents, sils existent, des nombres suivants 0, 5 et -4 par la fonction f

II Ensemble de définition dune fonction numérique

Activité

Soit une fonction f numérique définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

1. Déterminer les images de 0 ; 2 par la fonction f.
2. Peut-on calculer les images de 1 et -1 par la fonction f ?

Définition

On appelle **ensemble de définition** dune fonction numérique f , lensemble des nombres réels x pour lesquels limage $f(x)$ est **bien définie** et se note souvent D_f On écrit
$D_f=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\mathbb{R}\}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

- f est définie sur un I si et seulement si I est inclus dans D_f .
- Pour déterminer lensemble de définition dune fonction f; il faut éliminer tous les nombres réels pour lesquels le dénominateur est nul et ce qui sous le symbole de la racine carrée est négatif.
- Techniques :
- Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions polynômes.

Fonction	Ensemble de définition
▶ $x \mapsto P(x)$	▶ $D = \mathbb{R}$
▶ $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	▶ $D = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$
▶ $x \mapsto \sqrt{P(x)}$	▶ $D = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$.
▶ $x \mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	▶ $D = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$
▶ $x \mapsto \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	▶ $D = \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 et Q(x) \neq 0\}$
▶ $x \mapsto \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	▶ $D = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0 et Q(x) > 0\}$

• Exemple

$f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$ $D_f = \mathbb{R}$ car est une fonction polynôme.

$g : x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x+1}$ On a $D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\dfrac{-1}{2}\}$

Application

Déterminer lensemble de définition des fonctions suivantes

$f_1 : x \mapsto 8x^2 + 3x - 5$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{-2x+4}{3x-1}$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{-3x+2}{-3x+5}}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{-2x+4}}{\sqrt{3x+3}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Egalité de deux fonctions numériques

Définition

Soient f *et* g deux fonctions numériques D_f *et* D_g ses ensembles de définitions respectives.
On dit que f et g sont égales si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
* $D = D_f = D_g$.
* On a Pour tout x de D on a $f(x) = g(x)$.

• Exemple

On considère les fonctions suivantes : $f = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$
Étudions légalité de f *et* g
*$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_g$.
* Pour tout x de D on a $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$
Par conséquent $f = g$

Application

Etudier légalité des fonctions suivant :
* $f(x) = \dfrac{x}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

IV Représentation graphique dune fonction

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.
On appelle représentation graphique ou une courbe de la fonction f , quon note (C_f) lensemble de points $M(x,y)$ du plan tel que $x \in D_f$ et $y = f(x)$. Léquation $y = f(x)$ sappelle équation de la courbe.

• Exemple

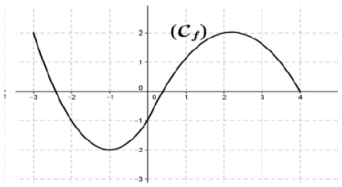
1 Soit une fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ et C_f sa courbe.

Parmi les points suivants déterminer ceux qui appartient à C_f en justifiant la réponse ; $A(0,0)$; $B(1,\frac{1}{3})$; $C(2,1)$; $D(-1,\frac{-1}{2})$)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 La figure ci-dessous montre la courbe dune fonction



a Déterminer lensemble de définition de la fonction
b Déterminer les images de -3 ;0 et 4
c Déterminer les antécédents de 2 et -2
d Déterminer les points dintersection de la courbe avec les axes du repère.

Remarque

* Pour déterminer les points dintersection de la courbe dune fonction avec laxe des abscisses on résoudre léquation $f(x) = 0$ sachant que $x \in D_f$.
Si $0 \in D_f$; alors le point dintersection de (C_f) avec **laxe des ordonnés** est $A(0, f(0))$

Application

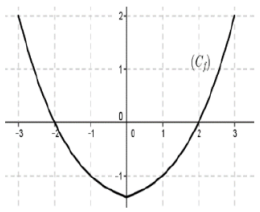
Soit une fonction numérique définie par $f_1 : x \mapsto x^2 + 2x + 3$ et sa courbe. Déterminer les points dintersection de (C_f) avec les axes du repère.

V Parité dune fonction numérique

1 Fonction paire

Activité

Soit une fonction f et sa courbe comme suit



1 Déterminer lensemble de définition

2 Compléter le tableau suivant :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$						

3 Comparer $f(-1)$ et $f(1)$ puis $f(-3)$ et $f(3)$

4 Que peut-on déduire pour $f(-x)$ et $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

5 Quelle la propriété géométrique vérifie par C_f

Définition

Soit une fonction numérique et son ensemble de définition. On dit que est une fonction **paire** si les deux conditions suivantes soient vérifiées :
* Pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$
* Pour tout $x \in D_f$ on a $f(-x) = f(x)$

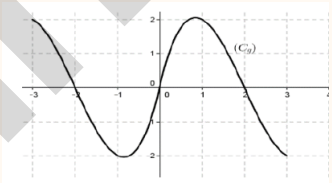
Propriété

La fonction est dite **paire** si et seulement si, sa **courbe** est **symétrique** par rapport à **laxe des ordonnés**

2 Fonction impaire

Activité

On considère une fonction g définie par sa courbe ci-dessous



1 Déterminer D_g lensemble de définition

2 Comparer $g(-1)$ et $g(1)$ puis $g(-3)$ et $g(3)$

3 Que peut-on déduire pour $g(-x)$ et $g(x)$ pour tout $x \in D_g$

4 Quelle la propriété géométrique vérifie par C_g

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.. On dit que f est une fonction **impaire** si les deux conditions suivantes soient vérifiées :
Pour tout $x \in D_f$ on a$-x \in D_f$
Pour tout $x \in D_f$ on a$f(-x) = -f(x)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

La fonction est dite **impaire** si et seulement si, sa **courbe** est **symétrique** par rapport à **lorigine du repère**

• Exemple

* Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 + 1 ; D_f = \mathbb{R}$
o Pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$
o Pour tout $x \in D_f ; f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$
Donc la fonction f est une fonction paire.
* Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2x ; D_f = \mathbb{R}$
o Pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$
o Pour tout $x \in D_f ; f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$
Donc la fonction f est une fonction impaire.

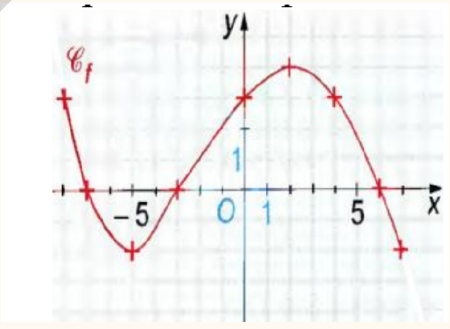
Application

Étudier la parité des fonctions suivantes :
$f_1 : x \mapsto 8x^2 - 5$
$f_2 : x \mapsto \dfrac{-2x}{x^2 - 1}$
$f_3 : x \mapsto \sqrt{x} + 1$
$f_4 : x \mapsto sin(x) - xcos(x)$

VI Variations dune fonction numérique

Activité

Soit f une fonction numérique définie par la courbe ci-dessous



1. Déterminer D_f lensemble de définition
2. Comment se comporte $f(x)$ dans lintervalle [-5 ;2]
3. Comment se comporte $f(x)$ dans lintervalle [2 ; 6]
4. Compléter le tableau suivant

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

x	-7	-5	$+\infty$
$f(x)$	3 ↘	-1	

Ce tableau sappelle tableau de variation de la fonction f

Propriété

Soit f une fonction définie sur$I$ et soient a et$b$ deux nombres réels dans I si $a < b$ et $f(a) < f(b)$ alors on dit que la fonction f est strictement croissante sur I.
o Si $a < b$ et $f(a) > f(b)$ alors on dit que la fonction f est strictement décroissante sur$I$. o Si $a < b$ et $f(a) = f(b)$ alors on dit que la fonction f est constante sur I.
o On dit que f est strictement monotonie sur I, si et seulement si, f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Application

Soit f une fonction définie sur par $f(x) = 2x^2 + 3$

1. Étudier la parité de f pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^-$.
4. Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

a Taux de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur I. Soient a et b deux nombres réels **distincts** de I.
Le nombre réel T tel que $T = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ sappelle **taux de variations** de la fonction f entre a et b.

Propriété

Soit une fonction numérique définie sur I et T son taux de variations.
o Si $T > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
o Si $T < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
o Si $T = 0$ alors la fonction f est constante sur I.

• Exemple

Soit une fonction définie par $f(x)$
Soient a et b deux nombres réels distincts de $\mathbb{R}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On a $T = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = \dfrac{2a+1-(2b+1)}{a-b}$ Donc $T = \dfrac{2a+1-2b-1}{a-b} = \dfrac{2(a-b)}{a-b} = 2$
Or on a $2 > 0$ par conséquent $T > 0$ Donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Application

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Montrer que le taux de variations f pour tous a et b distincts de $\mathbb{R}$ est $T = a + b - 4$
2. Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles suivants $]-\infty;2]$ et $[2;+\infty[$
3. Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

1 Monotonie et parité d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, inclus dans D_f et I' le symétrique de I par rapport à 0.

- Dans le cas où f est paire, on a :
  - Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur I'.
  - Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur I'.
- Dans le cas où f est impaire, alors :
  f a le même sens de variation sur I et sur I'.

2 Maximum et minimum d'une fonction

Définition

Soient f une fonction numérique. I un intervalle inclus dans D_f et $a \in I$.

- Dire que $f(a)$ est le maximum (la valeur maximale) de la fonction f sur I signifie que :

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{pour tout } x \in I$$

- Dire que $f(a)$ est le miniimum (la valeur minimale) de la fonction f sur I signifie que :

$$f(x) \geq f(a) \quad \text{pour tout } x \in I$$

Remarque

- Le maximum d'une fonction f sur I est la plus grande valeur prise par f sur I.
- Le minimum d'une fonction f sur I est la plus petite valeur prise par f sur I.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=\frac{1}{x}+2$ et $g(x)=-x^2-2$

1 Montrer que 2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}_*^+$

2 Montrer que -2 est le maximum de g sur $\mathbb{R}^-$

VII Fonctions périodiques-Parabole-hyperbole :

1 Fonctions périodiques- les fonctions $x \longrightarrow sin(x)$ et $x \longrightarrow cos(x)$:

Définition

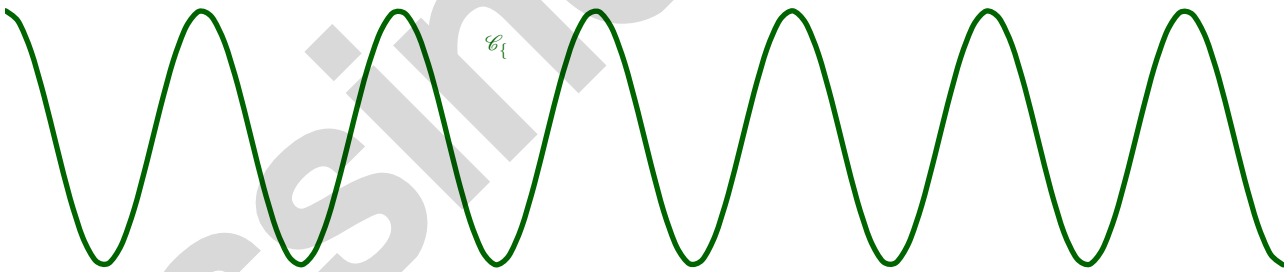
Soient f une fonction numérique et D_f son domaine de définition. On dit que la fonction f est périodique s'il existe un nombre réel T strictement positif tel que :

- Pour tout $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f$.
- Pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x+T)=f(x)$.

Le nombre réel T est appelé période de la fonction f, et la fonction f appelée T-périodique.

• Exemple

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la représentation graphique suivante :



La fonction f est de période $T=4$

Application

On considère les deux fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\cos(x)$ et $g(x)=\sin(x)$

1 Étudier la parité de chacune des deux fonctions f et g.

2 Calculer $f(x+2\pi)$ et $g(x+2\pi)$ tel que : $x \in \mathbb{R}$. Déduire.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Parabole-hyperbole :

a A) La fonction $x \longrightarrow ax^2$ $(x \in \mathbb{R}^*)$

Activité

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on conclure ?
2. Calculer le taux de variations de la fonction f entre deux nombres réels distincts a et b
3. Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$
4. En déduire la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;0]$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
6. Remplir le tableau suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
f(x)				

7. Construire la courbe représentative (C_f)

Définition

Soit a un nombre réel non nul. La courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow ax^2$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan est appelée **parabole de sommet O, et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées**.

Propriété

Soit a un nombre réel non nul. Le tableau de variations de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2$ est :

Si $a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

Application

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner la nature de la courbe (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis construire (C_f)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

b B) La fonction $x \longrightarrow ax^2+bx+c$

Définition

Soient a, b et c des nombres réels et a non nul. La courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow ax^2+bx+c$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan est une parabole de sommet $\omega(\frac{-b}{2a};f(\frac{-b}{2a}))$, et d'axe de symétrie la droite d'équation $x=\frac{-b}{2a}$

Application

Donner le sommet et l'axe de symétrie pour chacune des courbes représentatives des fonctions définies par : $f_1 : x \longmapsto x^2+2x+1$ $f_2 : x \longmapsto -2x^2+4x+1$ $f_3 : x \longmapsto x^2+1$

Propriété

Soit a, b et c des nombres réels et a non nul. Le tableau de variations de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2+bx+c$ est :

Si $a>0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f(\frac{-b}{2a})$	↗	

Si $a<0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f(\frac{-b}{2a})$	↘	

Application

Dresser le tableau de variations de fonctions définies par :
$f_1 : x \longmapsto x^2+2x+1$ $f_2 : x \longmapsto -2x^2+4x+1$ $f_3 : x \longmapsto x^2+1$

Application

Considérons f la fonction définie sur par $f : x \longmapsto x^2-4x+3$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la nature de (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Construire (C_f)
4. Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ax^2$

c C) La fonction $x \longrightarrow \frac{\alpha}{x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

Parité de f

✓ Pour tout $x \neq 0$ on a, $-x \neq 0$ donc $-x \in IR^*$.
✓ On a $f(-x)=\frac{\alpha}{-x}=-\frac{\alpha}{x}=-f(x)$.
On déduit que f est impaire et par conséquent (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Monotonie de f

Soient x_1 et x_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R}*$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Le taux de variations de f entre x_1 et x_2 est : $T = \frac{-\alpha}{x_1 x_2}$.
- Si $x_1 \in]0;+\infty[$ et $x_2 \in]0;+\infty[$, alors : $x_1 x_2 > 0$.
- Si $x_1 \in]-\infty;0[$ et $x_2 \in]-\infty;0[$, alors : $x_1 x_2 > 0$.
Ce qui entraine que le signe de T est le signe de $-a$.

Si $\alpha > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Si $\alpha < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

Application

Considérons f et g deux fonctions définies sur IR^* par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{-2}{x}$.

1. Déterminer la nature de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé.
2. Remplir le tableau suivant :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
f(x)						
g(x)						

3. Construire (C_f) et (Cg).

d D) La fonction harmonique $x \longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$

Définition

On appelle fonction **homographique** toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels tels que : $ad - bc \neq 0$

Propriété

Toute fonction homographique peut se mettre sous **la forme réduite** $x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$

• Exemple

Cherchons la forme réduite de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$
Pour tout x différent de 3, on a : $f(x) = \frac{2(x-3)+7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$
Donc $\alpha = 2$, $\beta = 7$ et $\gamma = 3$

Application

Donner la forme réduite des fonctions homographiques suivantes :
• $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$; • $g(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$; • $h(x) = \frac{2x-11}{3x+6}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Le tableau de variations de la fonction : $x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$ est :

Si $\beta > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

Si $\beta < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

Application

Donner le tableau de variations des fonctions homographiques suivantes :
• $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$; • $g(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$; • $h(x) = \frac{2x-11}{3x+6}$

Propriété

La courbe représentative de $x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$ est une hyperbole de centre $\omega(\gamma;\alpha)$ et d'asymptotes $x = \gamma$ et $y = \alpha$

Application

Considérons f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la nature de (C_f).
3. Construire (C_f).
4. Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{x}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today