# Les primitives



## I Primitives d'une fonction numérique :

D **Définition**

Une fonction $F$ est une primitive d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ si : $\forall x \in I$ ; $F'(x) = f(x)$

**Exemple**

- ♣ Fonction primitive de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto x^2 + 3x$
- ♣ Fonction primitive de la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \sin(x)$

**Propriété**

Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet une fonction primitive sur $I$.

**Propriété**

$F$ est une primitive d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$.
Toute fonction primitive $G$ de $f$ sur $I$ est de la forme $G(x) = F(x) + c$ ; $(c \in \mathbb{R})$

**Exemple**

Les fonctions primitives de la fonction $f(x) = 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $F(x) = x^2 + 3x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

**Propriété**

$F$ est une primitive d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ ; il existe une seule fonction primitive $G$ de $f$ qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$

**Exemple**

Déterminer la fonction primitive de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ qui prend la valeur 0 en $-1$

Les primitives de $f$ sont de la forme $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + c$ ; $c \in \mathbb{R}$

Puisque $F(-1) = 0 \iff \frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^2 + 3 \times (-1) + c = 0$

$\iff \frac{1}{4} - 4 + c = 0$

$\iff c = \frac{15}{4}$

**conclusion :**

Yassine Flamri

La fonction primitives de $f(x)=x^3-2x+3$ qui prend la valeur 0 en $-1$ est : $G(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+3x+\frac{15}{4}$

## II Fonctions primitives de la somme de deux fonction - le produit d'une fonction par un réel $\alpha$

**Propriété**

$F$ et $G$ sont les primitives respectivement de $f$ et $g$ sur $I$, on a :
- ♣ $F+G$ est une primitive de $f+g$.
- ♣ $\alpha F$ est une primitive de $\alpha f$.

**Exemple**

Soient $f(x)=3x$ et $g(x)=\cos(x)$, leurs fonctions primitives sont respectivement $F(x)=6x^2+c$ et $G(x)=\sin(x)+c'$ avec $c$ et $c'\in\mathbb{R}$

## III Opérations sur les fonctions primitives - Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles

### 1 Opérations sur les fonctions primitives

| Fonction $h$ | $H$ primitive de $h$ |
|---|---|
| $f'+g'$ | f+g |
| $\alpha f'$ | $\alpha f$ |
| $f'\times g+f\times g'$ | $f\times g$ |
| $-\frac{g'}{g^2}$ | $\frac{1}{g}$ |
| $\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$ | $\frac{f}{g}$ |
| $f'\times f^n\ ;\ n\neq -1$ | $\frac{1}{n+1}f^{n+1}$ |
| $f'\times g'\circ f$ | $g\circ f$ |
| $f'(ax+b)\ ;\ a\neq 0$ | $\frac{1}{a}f(ax+b)$ |

Yassine Elamri





Today better than yesterday, tomorrow better than today

## 2 Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles

| Fonction $f$ | $F$ primitive de $f$ $(c \in \mathbb{R})$ |
|---|---|
| $f(x) = 0$ | $F(x) = c$ |
| $f(x) = a\ ;\ a \in \mathbb{R}$ | $F(x) = ax + c$ |
| $f(x) = x$ | $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ |
| $f(x) = x^n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ | $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ |
| $f(x) = x^r\ ;\ r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ | $F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + c$ |
| $f(x) = \sin(x)$ | $F(x) = -\cos(x) + c$ |
| $f(x) = \sin(ax+b)\ ;\ a \neq 0$ | $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $F(x) = \sin(x) + c$ |
| $f(x) = \cos(ax+b)\ ;\ a \neq 0$ | $F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$ |
| $f(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $F(x) = \tan(x) + c$ |
| $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ | $F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2}$ | $F(x) = -\frac{1}{x} + c$ |

Yassine Elamri





Today better than yesterday, tomorrow better than today