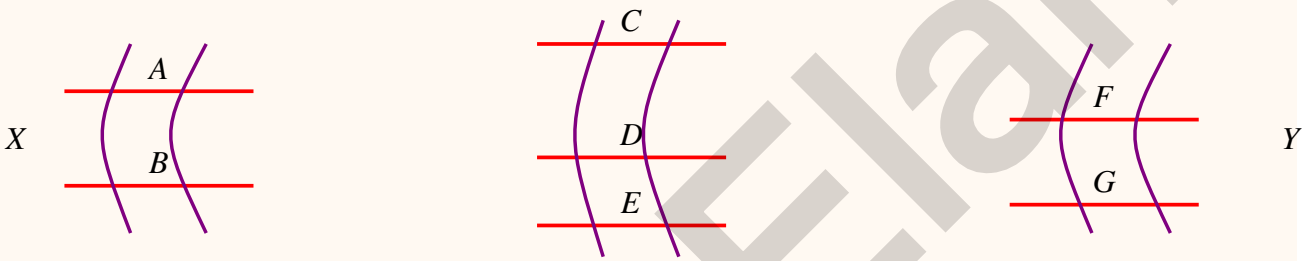
Chapitre

Dénombrement

I Principe général du dénombrement

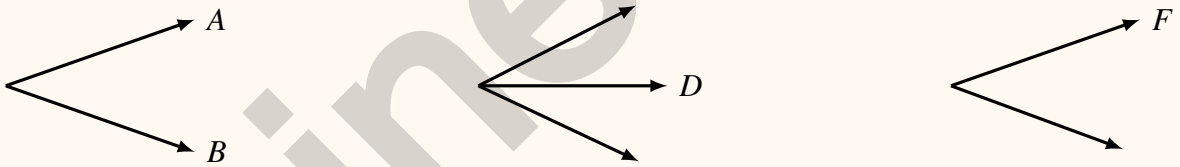
Activité

Une personne veut atteindre le point Y à partir du point X par le passage de trois vallées comme le montre la figure ci-dessous :



L'écriture ADF signifie que cette personne est passée par le pont A, le pont D puis le pont F.

1 Compléter l'arbre suivant, puis déduire l'ensemble des chemins menant au point Y.



2 Calculer le nombre de chemins que cette personne pourrait emprunter pour atteindre le point Y.

Définition

Soit p choix. Si le premier choix se fait de n_1 manière différente et le second choix se fait de n_2 manière différente ... et le p^{ieme} choix se fait de n_p manière différente, alors le nombre de façons dont tous ces choix sont faits est :

$$n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$$

• Exemple

On considère les chiffres suivants : 1;3;4;5;7 et 8.
On veut former un code de 3 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres précédents.
Le nombres des choix du premier chiffre est : 6.
Le nombres des choix du second chiffre est : 5.
Le nombres des choix du troisième chiffre est :4.

Yassine Elamri

Donc d'après le principe général de dénombrement le nombre de codes possibles est : $6.5.4 = 120$

• Exemple

Une personne possède trois chemises, deux cravates et trois pantalons.
Déterminons le nombre de costumes que cette personne peut porter. (Chaque costume se compose d'une chemise, d'une cravate et d'un pantalon)

II Arrangement et Permutation

Activité

On veut ranger, cinq objets notés $1, 2, 3, 4$ et 5 dans trois tiroirs notés A, B et C.

1. Combien de rangements différents peut-on réaliser ?
2. Combien de rangements où l'objet 1 est placé dans le tiroir A ?
3. Combien de rangements sont effectués dans deux tiroirs ?
4. Combien de rangements différents peut-on réaliser si on dispose de 5 tiroirs A, B, C, D et E ?

Propriété

Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. On note le nombre des arrangements de p éléments parmi n par : A_n^p. Et on a : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Remarque

- Par convention : $A_n^0 = 1$.
- L'ordre est important dans tout arrangement.

• Exemple

Calculer A_5^3 ; A_9^4 ; A_7^1 ; A_6^6.

Application

Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres $1, 3, 5, 7$ et 9 tous distincts ?

Application

On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres A, B, C, D, E et F.
Déterminer le nombre de mots possibles.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Un parking comporte sept places libres repérées par les numéros 1 à 7.
De combien de façons peut-on garer :

1. Une voiture ?
2. Trois voitures ?
3. Sept voitures ?

Définition

Soit n un entier naturel. Tout arrangement de n éléments parmi n éléments est appelé une permutation.
On note le nombre de permutations de n par : $n!$. Et on a : $n! = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Remarque

- Par convention : $0! = 1$.
- $n!$ se lit 'factorielle n'

• Exemple

1. $3! =$
2. $\frac{5!}{2!} =$

Application

Trois amis se photographient en changeant de places (un au milieu, un à sa droite et l'autre à sa gauche).
De combien de façons différentes peuvent ils se placer pour la photo ?

Application

Comparer A_7^5 et $\frac{7!}{(7-5)!}$.

Propriété

Pour tout entier n et tout entier p tel que : $1 \leq p \leq n$ On a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Combinaison

Activité

Un groupe se compose de quatre personnes :

$$E = \{a; b; c; d\}.$$

Nous voulons former un comité de trois personnes pour effectuer une tâche.

1. Déterminer les comités qu'on peut former.
2. Calculer $\frac{A_4^3}{3!}$. Conclure.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant : $1 \leq p \leq n$ On appelle combinaison de p éléments parmi n éléments de E toute partie de E possédant p éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est égal à C_n^p et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

Remarque

- $C_n^0 = 1$. - C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (L'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition)

• Exemple

Calculer : C_3^2 ; C_5^2 ; C_7^7.

Activité

Dans une classe est composée de 4 filles et 6 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

1. Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer.
2. Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.
3. Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.
4. Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.
5. Déterminer le nombre de groupes qui contiennent aux plus trois filles.

IV Type de tirage

On tire p éléments parmi n.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Type de Tirage	Nombre de tirages possible	L'ordre
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif sans remise	A_n^p	Important
Successif avec remise	n^p	Important

V Principe de la somme

Activité

On considère les ensembles suivants : $A = \{4,6,8,10,12\}$ et $B = \{3,4,5,7,12\}$.

1. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$. On note le nombre d'éléments d'un ensemble E par $\text{card}(E)$ et se lit ń cardinal de E ż.
2. Déterminer $\text{card}(A), \text{card}(B), \text{card}(A \cap B)$ et $\text{card}(A \cup B)$.
3. Comparer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Propriété

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. $\text{card}(\emptyset) = 0$ $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Remarque

Si $A \cap B = \emptyset$, alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Application

Dans une faculté, il y a 1000 étudiants, dont 400 étudient l'anglais et 750 étudient l'espagnol. Déterminer le nombre d'étudiants qui étudient l'anglais et l'espagnol.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today