Chapitre

Dénombrement

Opérations entre deux ensembles - Ensemble fini - Cardinal

1 Ensemble - Intersection - Réunion - Complémentaire

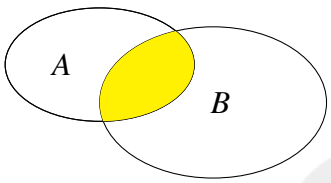
Définition : 1 : Ensemble

Intuitivement, un ensemble est un regroupement d'objets qu'on appelle éléments. On met souvent les éléments d'un ensemble entre deux accolades $\{...\}$. Les éléments d'un esembles ne sont nécessairement pas ordonnés.
Les deux ensembles $\{a;b;c;c;b\}$ est égale à l'ensemble $\{a;b;c\}$. La notion d'ensemble ignore la répétition.

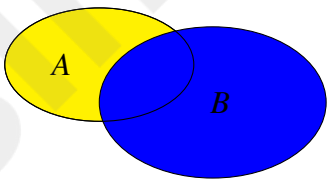
Définition : 2 : Intersection, Réunion et complémentaire

Soit A et B deux ensembles.

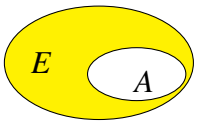
- L'**intersection** des deux ensembles A et B est l'ensemble qu'on note $A \cap B$ et qui contient les éléments appatrtenant à A **et** à B.
- La **réunion** des deux ensembles A et B est l'ensemble qu'on note $A \cup B$ et qui contient les éléments appatrtenant à A **ou** à B.
- **Le complémentaire** d'une partie E d'un ensemble A qu'on note C_A^E ou $\overline{A}$ et qui contient les éléments de A n'appartenant pas à E.



$A \cap B$



$A \cup B$



C_A^E

2 Ensemble fini - Cardinal d'un ensemble fini

Définition :

Soit E un ensemble et n un entier naturel.

- Si E contient exactement n éléments, on dit que E est un ensemble **fini** et le **cardinal de E** est égal à n et on note :

$$Card\,(E) = n$$

.

- Un ensemble E qui **n'est pas fini** est dit **un ensemble infini**. On pourrait écrire : $Card\,(E) = +\infty$

Yassine Elamri

Exemple

- $Card\,(\emptyset) = 0$. L'ensemble vide est un ensemble fini ayant zéro élément.
- L'ensemble F des lettres de l'alphabet qui forment le mot « MATHÉMATIQUES » est un ensemble fini ayant 10 éléments. $F = \{M;A;T;H;;I;Q;U;E;S\}$. Donc $Card\,(F) = 10$.
- L'ensemble M_6 des diviseurs de 6 est un ensemble fini ayant 4 éléments. $M_6 = \{1;2;3;6\}$. Donc $Card\,(M_6) = 4$.
- L'ensemble G des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini ayant 11 éléments. Donc $Card\,(G) = 11$.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels est un ensemble infini. Donc $Card\,(\mathbb{N}) = +\infty$.

II Principe additif - Principe fondamental du dénombrement

1 Principe additif

Proposition

soient A et B deux ensembles finis, on a :

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
2. Si A et B sont disjoints, alors on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
3. Si E un ensemble donné et A une partie de E, alors $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

Application

Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans le football.

1. Quel est le nombre délèves qui pratiquent le basket-ball ?
2. Quel est le nombre délèves qui pratiquent au moins un sport ?
3. Quel est le nombre délèves qui ne pratiquent pas de deux sports ?

2 Principe fondamental du dénombrement ou Principe du produit

Activité

Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?

Activité

On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite ,quel est le nombre de possibilités.

Yassine Elamri

Propriété

Soit E une expérience dont les résultats nécessitent p choix .
Le 1^{re} se fait de n_1 façons distincts.
Le 2^{me} se fait de n_2 façons distincts.
...
Le p^{ime} se fait de n_p façons distincts.
Alors le nombre des résultats possible est le produit $n_1 \times n_2 \times n_3 ... \times n_p$.

• Exemple

Une classe de 15 garçon et 12 filles.
Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe.
Combien de possibilités de choix.

Application

On considère les chiffres suivants : 5-6-7-2-3.
On veut former des entiers naturels de trois chiffres distincts parmi ces chiffres.
1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Combien de nombres paires peut-on former ?
3. Combien des multiples de 5 peut-on former ?

III Techniques de dénombrement

1 Arrangement avec répétition

Activité

Combien de nombre du mots de 3 lettres choisies parmi 26 lettres (ayant un sens ou non) peut on former ?

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Un **arrangement avec répétition** de p éléments parmi n éléments de E tout **p-uplet** $(x_1; x_2; ...; x_p)$.
Tel que les éléments $x_1; x_2; ...; x_p$ sont non nécessairement distincts.

Propriété

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $1 \leq$ n et $p \in \mathbb{N}^*$
Le nombre d'arrangement avec répétition (remise) de p éléments de E est : n^p

Yassine Elamri

• Exemple

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ?

2 Arrangements sans répétition

Activité

Pour accéder à une banque de données, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres sur votre clavier . Combien de mots de passe de 4 lettres distincts peut-on créer ?

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \geq 1$ et $1 \leq p \geq$.
Un **arrangement sans répétition** de p éléments parmi n éléments de E tout **p-uplet** $(x_1;x_2;...;x_p)$.
Tel que les éléments $x_1;x_2;...;x_p$ sont deux à deux distincts.

Propriété

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$ Tels que $1 \leq$ p $\leq$ n
Le nombre d'arrangements sans répétition (sans remise) de p éléments de E est le nombre A_n^p donné par : A_n^p= n(n-1)(n-2)...(n-p+1)

• Exemple

Dans un tournoi il y'a 10 participants Déterminer le nombre de classements des 3 premiers places (on suppose que 2 coueurs ne peuvent pas prendre le même classement).

Application

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.
On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne
1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Quel est le nombre de possibilités de tirer 3 boules de même couleur ?

3 Les permutations

a Permutation sans répétition

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$
On appelle Permutation de E toute bijection de E dans E
Autrement dit une Permutation est un arrangement sans répétition de tous les éléments de E.

Yassine Elamri

Propriété

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$
le nombre de permutations des éléments de E est le nombre noté n ! se lit " factoriel n " est défini par : n !=A_n^n=n(n-1)(n-2)...Œ2Œ1

• Exemple

De combien de façon pouvez-vous ranger 7 élèves dans une table de 7 chaises ?

Remarque

1. 0 !=1 et A_n^0=1
2. Pour tout (n ;p) $\in \mathbb{N}^2$ Tels que 1≤ p ≤ n on a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
En particulier :$A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

• Exemple

Quel est le nombre de mots de 3 lettres (avec un sens ou non) du mot " AID " qu'on peut former ?

b Permutation avec répétition

Propriété

Soit E un ensemble de cardinal K et $n_1 ; n_2 ; \ldots ; n_K$ des entiers naturels tels que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$
Le nombre de permutations de n éléments avec répétition est égal à : $\frac{n!}{n_1 ! n_2 ! \ldots n_k !}$

Remarque

Une anagramme est un mot (ayant un sens ou non) obtenu en permettant les lettres d'un mot au départ

• Exemple

Combien d'anagramme peut-on former avec les lettres du mot "ELEVE"

• Exemple

Les $\frac{5!}{2!1!2!}$ permutations des 5 éléments a ;a ;b ;c ;c

Yassine Elamri

4 Les combinaisons

Activité

Soit $\omega = a;b;c;d;e;$ un ensemble
Quel est le nombre de sous-ensemble à 2 éléments ?

Définition

Soit E un ensemble fini et non vide de cardinal $1 \leq$ n et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que p $\leq$ n.
Une combinaison de p éléments pris parmi les n éléments de E est une partie (sous-ensemble) dont le cardinal est p.

Propriété

Le nombre de combinaison de p éléments pris parmi les n éléments distincts est le nombre que l'on note par $\mathscr{C}_n^p$ et on écrit : $\mathscr{C}_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Remarque

1. $\mathscr{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
2. $\mathscr{C}_n^0 = 1$; $\mathscr{C}_n^1 = n$ et $\mathscr{C}_n^n = 1$

Exemple

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7 on tire 2 boules se l'urne simultanément.
Déterminer le nombre de possibilités de situations suivantes :
M " obtenir deux boules "
A " La somme des numéros obtenus est pair"
B " La somme des numéros obtenus est impairs"

5 L'ordre des éléments au dénombrement

Le nombre de l'ordre p_n est donnée par :
$p_n = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$ où $n_1, n_2, ..., n_p = n$
n : le nombre de boule tiré
$n_1;n_2$: le nombre de boules tiré de chaque couleur (Type)

Exemple

Une urne contient 5 boules vertes ; 3 boules noires et 7 boules rouges.
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne
1. Quel est le nombre de possibilités ?
2. Déterminer le nombre de possibilités des situations suivantes :
A " obtenir une boule de chaque couleur "

Yassine Elamri

B " Obtenir au moins une boule noire "
C " Obtenir une boule verte et deux boules rouges"
D "Obtenir exactement une boule rouge "

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$ on a les propriétés suivantes :
1. La symétrie : $\mathscr{C}^{p_n} = \mathscr{C}_n^{n-p}$
2. Formule de Pascal : $\mathscr{C}^{p-1}n + \mathscr{C}_n^p = \mathscr{C}^p n + 1$

Remarque

La formule $\mathscr{C}_n^{p-1} + \mathscr{C}_n^p = \mathscr{C}_{n+1}^p$ permet de calculer les nombres $\mathscr{C}_k^q$ tel que $0 \leq q \leq k$ en utilisant un tableau est appelé **Triangle de Pascal**.

k \ q	0	1	2	3	4	5	⋯
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮						⋱

Formule de Pascal

$$\binom{k}{q} + \binom{k}{q+1} = \binom{k+1}{q+1}$$

Exemple

1. $\mathscr{C}_3^2 = \mathscr{C}_2^1 + \mathscr{C}_2^2 = 2 + 1 = 3$
2. $\mathscr{C}_5^3 = \mathscr{C}_4^2 + \mathscr{C}_4^3 = 6 + 4 = 10$

6 Formule du binome de Newton

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$(a+b)^n = \mathscr{C}_n^0 a^n + \mathscr{C}_n^1 a^{n-1}.b + \mathscr{C}_n^2 a^{n-2}.b^2 + \ldots + \mathscr{C}_n^{n-1} a.b^{n-1} + \mathscr{C}_n^n b^n$
Ce qui peut également être noté :
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n-k} b^k$

Yassine Ilami

Exemple

1 On a $(a+b)^3 = \mathscr{C}_3^0 a^3 + \mathscr{C}_3^1 a^2 b + \mathscr{C}_3^2 ab^2 + \mathscr{C}_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
On peut aussi utiliser le Triangle de Pascal pour calculer les coefficients :

2

n=0 : 1
n=1 : 1 1
n=2 : 1 2 1
n=3 : 1 3 3 1
n=4 : 1 4 6 4 1
n=5 : 1 5 10 10 5 1

D'où :$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

Remarque

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on a : $(a-b)^n = (a+(-b)^n) = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k a^{n-k}(-b)^k = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k (-1)^k a^{n-k}(b)^k$

Exemple

Développer $(a-b)^5$ et $(a-b)^3$

■ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

Yassine Elamri