Chapitre

Le produit scalaire dans le plan

Cours 1BSX

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• L'étude analytique du cercle est un domaine riche pour l'application de l'analytique du produit scalaire surtout ce qui concerne la distance et l'orthogonalité. A cette fin, on mettra en évidence le rôle de la méthode analytique dans la résolution de certains problèmes géométriques . • On utilisera le produit scalaire pour déterminer une équation cartésienne d'un cercle . • On abordera, à travers des activités, le cercle défini par trois points non alignés • On exploitera, à cette occasion, le régionnement analytique du plan pour présenter la résolution graphique de quelques inéquations non linéaires à deux inconnues .	• Exprimer le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites . • Calculer les mesures des angles et calculer des aires . • Reconnaitre lensemble des points M du plan vérifiant la relation : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ • Déterminer le centre et le rayon d'un cercle défini par son équation cartésienne . • Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique et inversement . • Utiliser l'analytique du produit scalaire pour résoudre des problèmes géométriques et algébriques .

Les prés-requis	Les extensions
• Repère dans le plan • Equation d'une droite • la droite dans le plan • Produit scalaire	• Vecteurs de l'espace • Etude analytique de l'espace (plan) • Etude analytique de l'espace V3

Yassine Elamri

I Expression analytique du produit scalaire

1 Formule trigonométrique du produit scalaire

Activité

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : $AB=2$; $BC=2$; $AC=\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, on a :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ tel que : $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ est l'angle orienté formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Propriété

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$

2 Repère orthonormé direct

Définition

Soit $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ une base de plan , et O un point du plan .
On dit que $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé direct si et seulement si : $\left\|\overrightarrow{i}\right\|=\left\|\overrightarrow{j}\right\|=1u$,
$\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}=0$ et $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Dans ce que suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

3 Expression analytique du produit scalaire

Introduction :
soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans le plan tels que : $\overrightarrow{u}\,(x,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x',y')$
On a : $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j}$
Donc : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=xx'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i}+xy'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}+x'y\overrightarrow{j}.\overrightarrow{i}+yy'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}=xx'+yy'$ car : $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}=\overrightarrow{j}.\overrightarrow{i}=0$ et $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}=1$.
L'expression $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=xx'+yy'$ est lexpression analytique du produit scalaire.

Propriété

soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans le plan tels que : $\overrightarrow{u}\,(x,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x',y')$ On a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=xx'+yy'$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

On a : $\overrightarrow{u}(-1;3)$ et $\overrightarrow{v}(-2;1)$
Donc : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -1\times(-2)+3\times 1 = 5$

Propriété

soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans le plan tels que : $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$.

$$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \Leftrightarrow xx'+yy'=0$$

Application

1 soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs dans le plan tels que : $\overrightarrow{u}(-5,3)$, $\overrightarrow{v}\left(\frac{1}{2},-1\right)$ et $\overrightarrow{w}\left(-2;\frac{1}{3}\right)$
Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$.

2 soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans le plan tels que : $\overrightarrow{u}(2+m;-2)$, $\overrightarrow{v}\left(-3;\frac{1}{4}m\right)$.
Déterminer la valeur de m pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

4 Expression analytique de la distance entre deux points et la norme d'un vecteur

Propriété

- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan tel que $\overrightarrow{u}(x,y)$.
  On a : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x+y}$.
- Etant donné deux points A et B du plan tels que : $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.
  On a : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Application

On considère les points suivants : $A(3;2)$, $B\left(\frac{-1}{2};0\right)$ et $C(1;-1)$.

1 Calculer les distances suivantes : AB , AC et BC .

2 Montrer que le triangle ABC est rectangle en C .

5 Expression analytique de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Propriété

soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dans le plan et θ la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$.

On a : $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $\sin\theta = \frac{\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Application

On considère les points suivants : $A(3;3)$, $B(1;1)$ et $C(1;3)$.

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1 Calculer cos $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ et sin $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

2 Déduire la mesure de langle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.

Résultats :

► **Aire d'un triangle** :

Laire dun triangle ABC est : $S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\right|(u)$

► **Aire d'un parallélogramme à partir de deux vecteurs** :

Laire dun parallélogramme $ABCD$ est : $S=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$

Application

On considère les points suivants : $A(3;3)$, $B(2;2)$ et $C(0;3)$.

1 Calculer AC , BC et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2 Déduire la nature du triangle ABC .

3 Déterminer la surface du triangle ABC

II La droite dans le plan

1 Vecteur normal à une droite

Définition

Soit (D) une droite du plan et $\overrightarrow{u}$ son vecteur directeur.
Tout vecteur non nul et perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ sappelle vecteur normal à la droite (D) .

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ une droite déquation $ax+by+c=0$, le vecteur $\overrightarrow{u}(-b,a)$ est le vecteur directeur de (D) et le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ le vecteur normal à (D) .

• Exemple

Donner un vecteur normal à (D) dans les cas suivants :

► $(D):2x+3y-5=0$: Le vecteur normal à (D) est $\overrightarrow{n}(2;3)$.

► $(D):-3x+5=0$: Le vecteur normal à (D) est $\overrightarrow{n}(-3;0)$.

► $(D):-2y+5=0$: Le vecteur normal à (D) est $\overrightarrow{n}(0;-2)$.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Equation cartésienne dune droite définie par un point et un vecteur normal

Propriété

Soit (D) une droite du plan, passant par le point $A(x_0, y_0)$ et dont le vecteur normal est $\vec{n}(a;b)$.
Léquation cartésienne de la droite (D) est $ax+by+c=0$ où $c=-ax_0-by_0$

Application

1 Déterminer léquation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(-1;2)$ et dont le vecteur normal est $\vec{n}(2;-3)$.

2 Déterminer léquation cartésienne de la droite (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$ où $A(-1;2)$ et $B(2;-3)$.

3 Parallélisme et orthogonalité de deux droites

Propriété

Soient (D) et (D') deux droites du plan dont $\vec{n}(a,b)$ et $\vec{n'}(a',b')$ sont respectivement les vecteurs normaux à (D) et (D') .

- On dit que (D) et (D') sont parallèles si et seulement si : $\det\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=0$.
- On dit que (D) et (D') et sont orthogonales si et seulement si : $\vec{n}.\vec{n'}=0$

Application

Etudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivants :

- $(D): 2x+3y-1=0$; $(D'): \frac{3}{2}x-y+4=0$
- $(D): x+4y+3=0$; $(D'): -\frac{1}{2}x-2y+4=0$
- $(D): 2x+y-1=0$; $(D'): -x+2y+3=0$

4 Distance dun un point par rapport à une droite

Définition

Soit (D) une droite et soient A un point du plan et H le projeté orthogonale de A sur (D) .
Le nombre réel AH est appelé la distance du point A à la droite (D) et on écrit : $d(A,(D))=AH$.

Propriété

Soit (D) une droite déquation $ax+by+c=0$ et $A(x_0,y_0)$ un point du plan.
La distance du point A par rapport à la droite (D) est :

$$d(A,(D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Yassine Flani

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Soit (D) une droite déquation $(D): 2x+3y-1=0$ et soit A un point du plan.
Déterminer $d(A,(D))$

III Etude analytique dun cercle

1 Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Activité

On considère le cercle (C) de centre Ω et de rayon 2 .

1. Parmi les points suivants, déterminer ceux qui appartiennent au cercle (C) : $A(3;1)$; $B(2;2)$, $C\left(\sqrt{3}+1;2\right)$.
2. Soit $M(x;y)$ un point du plan
   a) Calculer la distance ΩM en fonction de x et y .
   b) Montrer que le point M appartient au cercle (C) si seulement si :

$$(E): x^2+y^2-2x-2y-2=0$$

3. En suivant la même démarche de la question 2)b), déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R .

Propriété

Soit un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R .
Une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $R\,(R\succ 0)$ est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

et on peut écrire : $x+y-2ax-2by+c=0$ avec $c=a+b-R$

• Exemple

On considère un cercle (C) de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

$$M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$$

Donc : $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}^2$
Alors : $x^2+y^2-4x+4+2y+1=2$
Doù $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ est une équation cartésienne du cercle (C) .

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

1 Déterminer une équation catésienne dun cercle de centre de centre $\Omega(-2;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

2 Déterminer une équation cartésienne dun cercle passant par le point A et de centre Ω dans les cas suivants :
$A(1;3)\,;\,\Omega(2;-1)$ / $A(2;4)\,;\,\Omega(2;0)$ / $A(2;-2)\,;\,\Omega(-2;3)$.

3 Déterminer le centre et le rayon dun cercle (C) dans les cas suivants :
$x^2+y^2-2x+2y-2=0$ / $x^2+4x-2y=0$ / $x^2+y^2+x-y-\frac{3}{2}=0$

2 Equation d'un cercle définie par son diamètre

Propriété

Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan.
Lensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est un cercle de diamètre $[AB]$ et déquation :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

Application

Déterminer une équation cartésienne dun cercle (C) et de diamètre $[AB]$ où $A(1;-3)$ et $B(2;1)$

3 Représentation paramétrique dun cercle

Définition

- Lensemble des points $M(x,y)$ du plan qui vérifient le système

$$(S):\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases} /\theta\in\mathbb{R}$$

est un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R .

- Le système (S) est appelé une représentation paramétrique dun cercle.

• Exemple

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(-2;5)$ et de rayon $R=2$.
$(C):\begin{cases} x=-2+2\cos\theta \\ y=5+2\sin\theta \end{cases} /\theta\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du cercle (C) .

Application

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(-2;5)$ et de rayon $R=2$.

1 a) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) .
b) Préciser deux points appartenant au cercle (C) .

2 Déterminer une représentation paramétrique dun cercle définie par léquation suivante : x^2+

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$y^2-6x+4y-1=0$

4 Ensemble de points $M(x,y)$ du plan vérifie $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Soient a,b et c des nombres réels et (E) un ensemble de points $M(x,y)$ du plan tel que :

$$(E)=\{M(x,y)/x+y+ax+by+c=0\}$$

Propriété

- Si $a^2+b^2-4c<0$ alors lensemble (E) est un ensemble vide et on écrit $S=\emptyset$.
- Si $a^2+b^2-4c=0$ alors lensemble (E) est un point qui est $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ et on écrit : $S=\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)\right\}$
- Si $a^2+b^2-4c>0$ alors lensemble (E) est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ et on écrit :

$$S=\left\{(C)\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right);R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right\}\right\}$$

Application

Déterminer lensemble de points $M(x,y)$ du plan qui vérifie :

- $x^2+y^2-x+3y-4=0$
- $x^2+y^2-6x+2y+10=0$
- $x^2+y^2-4x+5=0$

5 Positions relatives dune droite et un cercle

Pour étudier la position relative dun cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R et une droite (D), il suffit de comparer la distance $d(A,(D))$ et le rayon R .

Propriété

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R et soit (D) une droite du plan.

- ▶ Si $d(\Omega,(D))>R$ alors la droite (D) et le cercle (C) ne se coupent pas.
- ▶ Si $d(\Omega,(D))=R$ alors la droite (D) est tangente au cercle (C) (se coupent en un point).
- ▶ Si $d(\Omega,(D))<R$ alors la droite (D) et le cercle (C) se coupent en deux points.

Application

Etudier la position relative du cercle (C) et la droite (D) dans les cas suivants :

1. $(D):2x+3y-1=0$; $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=9$
2. $(D):x-y+3=0$; $(C):x^2+y^2-2x-2y-7=0$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

6 Équation cartésienne de la tangente d'un cercle en un point

Propriété

Soient (C) un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R et soit (D) une droite du plan,et soient $A \in (C)$ et $M \in (D)$.
La droite (D) est tangente au cercle (C) en A si et seulement si : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$.

Application

Soit (E) lensemble de points $M(x,y)$ du plan qui vérifie : $x^2+y^2-6x+4y-3=0$.

1. Montrer que (E) est un cercle (C) , en déterminant le centre et le rayon.
2. Vérifier que le point $A(3;2) \in (C)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente du cercle (C) en un point A .

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today