Chapitre

Ensembles : $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; D; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$

I Différents types de nombres

Il existe différentes sortes de nombres. Pour les classer, on les a regroupés dans différentes ensembles remarquables que nous allons énoncés.

1 Ensemble des nombres entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels : 0; 1; 2; 3; ...; 100; 101; ... est noté $\mathbb{N}$

On écrit : $\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 100;\ 101;\ ...\}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ est un ensemble infini, en effet si n appartient à $\mathbb{N}$, alors son successeur $n+1$ appartient aussi à $\mathbb{N}$.

• Exemple

♣ 16 est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$. On peut exprimer cette phrase en disant que : " 16 appartient à $\mathbb{N}$ ".
On écrit $16 \in \mathbb{N}$

♣ -16 n'est pas un élément de $\mathbb{N}$. C'est-à-dire " -16 n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ". On écrit $-16 \notin \mathbb{N}$

Remarque

♣ L'ensemble $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...\}$ est noté $\mathbb{N}^*$, et on a $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

♣ La soustraction et la division ne sont pas toujours possibles dans $\mathbb{N}$, en effet :

▷ Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ alors $(a-b) \in \mathbb{N}$ si et seulement si $a \geqslant b$.

▷ Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ alors $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ si et seulement si a est un multiple de b.

2 Ensemble des nombres entiers relatifs

L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$, il contient tous nombres entiers naturels et leurs opposées

$$\mathbb{Z} = \{...;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...\}$$

Remarque

♣ Tout élément de $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ ou que $\mathbb{N}$ inclus dans $\mathbb{Z}$, et on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

♣ Tout élément de $\mathbb{Z}$ n'est pas un élément de $\mathbb{N}$, et on écrit $\mathbb{Z}\mathbb{N}$

Yasine Elamri

Notation

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\} = \{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...\}$
- $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...; 100; 101; ...\}$ et $\mathbb{Z}^- = \{...; -100; ...-20; ...; -3; -2; -2; -1; 0\}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+$

3 Ensemble des nombres décimaux

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$, il contient des nombres tels que : -17; 1; 0; $-6,23475$; $12,758$
Cet ensemble contient tous les nombres entiers relatifs, de plus il contient tous les nombres tels que $-6,23475$; $12,758$ c'est-à-dire des nombres qui s'écrivent avec un nombre limité de chiffres après la virgule.

Les deux derniers nombres peuvent s'écrire : $-6,23475 = \dfrac{623475}{10^5}$; $12,758 = \dfrac{12758}{10^4}$
On peut généraliser cette écriture à tous les nombres décimaux, ce qui conduit à la définition suivante de l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / \ a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

En remarque que si $n = 0$ alors $\dfrac{a}{10^n} = \dfrac{a}{10^0} = a \in \mathbb{Z}$. On en déduit que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

• Exemple

- $12,5$ appartient à $\mathbb{D}$, puisque $12,5 = \dfrac{125}{10}$
- $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal c'est-à-dire $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ $\left(car : \dfrac{1}{3} = 0,33333... \right)$

4 Ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$, il contient les nombres fractionnaires positifs et négatifs.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

On remarque que si $b = 10^n$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{10^n} \in \mathbb{D}$, on en déduit que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
D'autre part si on essaye d'écrire le nombre $\dfrac{17}{3}$ sous forme d'une écriture décimal on trouve : $\dfrac{17}{3} = 5,666...666...$

Le nombre 6 se répète une infinité de fois après la virgule, cela signifie que le nombre $\dfrac{17}{3}$ n'est pas décimal, mais il possède une écriture décimale infinie et périodique de période 6 (**C'est le nombre qui se répète**)
Inversement, considérons le nombre $x = 5,666...666...$, on a :

$$\begin{cases} x = 5,666...666... \\ 10x = 56,666...666 \end{cases}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

D'où : $9x = 51$ ce qui fait : $x = \frac{51}{9} = \frac{3 \times 17}{3 \times 3} = \frac{17}{3}$

Remarque

♣ Tout nombre rationnel possède une écriture décimale infinie et périodique. Par exemple :

▷ $\frac{17}{3} = 5,6666...666...666$ a une écriture périodique de période 6.

▷ $\frac{17}{7} = 2,428571428571428571...428571$ a une écriture périodique de période 428571.

♣ Un nombre rationnel peut s'écrire d'une infinité de façons sous forme de quotients d'entiers, par exemple :

$-\frac{3}{5} = \frac{3}{-5} = \frac{-6}{10} = ... = \frac{-3k}{5k}$; $k \in \mathbb{Z}^*$

5 Ensemble des nombres réels

Activité

A. Supposons que $\sqrt{2}$ s'écrit sous forme fractionnaire $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux nombres entiers naturels
(non nuls) et $\frac{p}{q}$ irréductible c'est-à-dire p et q sont premiers entre eux.

1. Vérifier que : $p^2 = 2q^2$
2. Montrer que p^2 est pair. En déduire la parité de p.
3. Montrer que q^2 est pair. En déduire la parité de q.
4. Les nombres p et q sont-ils premiers entre eux ?
5. Que peut-on en déduire ?

B. 1. Calculer l'expression A où : $A = \frac{9,801}{\sqrt{8}\left(1,103 + \frac{24 \times 27,493}{394^6}\right)}$

L'expression A donne une écriture approché du nombre π.

2. Calculer π en utilisant la calculatrice puis comparer A et π.

Le problème des nombres irrationnels est un sujet qui été évoqué 5 siècles avant JC par l'un des militants de l'école pythagoricienne lorsqu'il a posé un problème aux adhérants de cette école consistant à déterminer la valeur exacte de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés égaux ont pour longueur 1. Le problème a conduit à la résolution de l'équation $x^2 = 2$.
Équation qui a comme solution positive le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Tout ce qu'on connaît de ce nombre c'est sa notation et qu'il vérifié $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

L'ensemble des nombres irrationnels est infini, il contient des nombres tels que : $\sqrt{3}$; π; $-\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\sqrt{5}$
L'ensemble des nombres réels est un ensemble qui contient les nombres rationnels et les nombres irrationnels, on le note par $\mathbb{R}$.

Yassine Elamri
Thttps://steinmath.com y, tomorrow better than today

Remarque

♣ Les nombres irrationnels n'ont pas d'écriture uniformisée (comme les nombres décimaux ou rationnels) ces nombres sont connus seulement par leur propriétés.

♣ Un nombre irrationnels a une écriture décimale **NON** périodique infinie, par exemple :

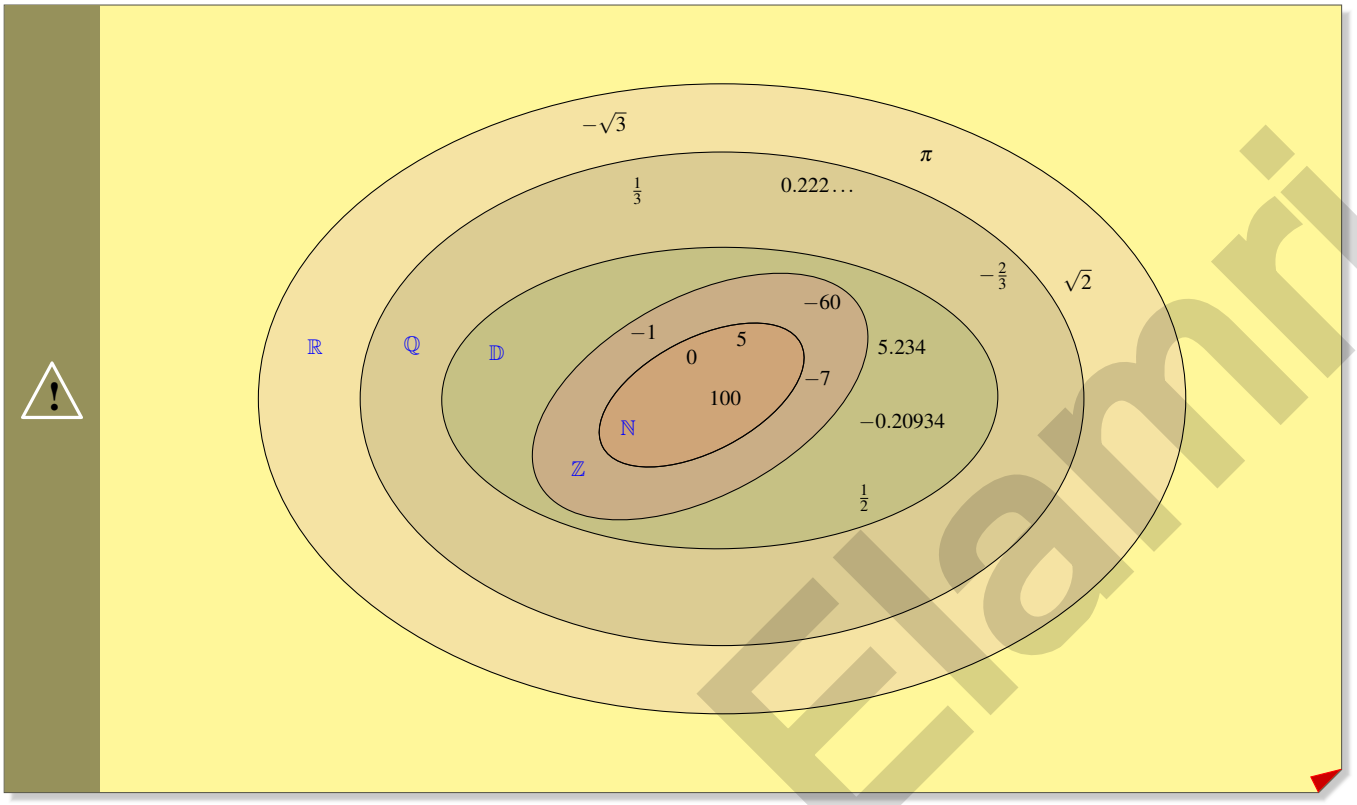
- ▷ $\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420 97....$
- ▷ $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 5105....$

Notation

♣ $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls.
♣ $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
♣ $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des nombres réels négatifs.
♣ $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
♣ $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble des nombres réels négatifs non nuls.
♣ $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



II Opérations dans $\mathbb{R}$ et propriétés

Activité

A. Calculer puis simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$

2. $B = \left(-2^{-1}+5\right)^{-1} \times \left(\dfrac{2}{5}-1\right)^{-2}$

3. $C = 2\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{10}\left(2+\sqrt{2}\right)$

4. $D = \dfrac{\sqrt{4,9\times 10^3}}{\sqrt{3\times 10^2}\times\sqrt{12\times 106}}$

B. **1.** Calculer : $A = \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} - \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{-1}$

2. On considère les deux expressions : $B = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}$; $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

a. Montrer que B et C sont deux nombres entiers naturels.
b. Vérifier que $A\sqrt{6}-\sqrt{10B}=18$

1 L'addition et la soustraction

Soient $a,b\in\mathbb{R}$, on a :

♣ $a+b=b+a$ et $a\times b=b\times a$ (On dit que $+$ et $\times$ sont **commutatives**)
♣ $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$
♣ $a+0=0+a$
♣ $(-a)+a=a+(-a)=0$
♣ $a-b=a+(-a)$
♣ $-(a-b)=-a+b$
♣ $Si\ \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ alors $a+c=b+d$

2 La multiplication et l'inverse

♣ $a\times b=b\times a=ab=ba$
♣ $a(bc)=(ac)b=abc$
♣ Tout nombre rationnel non nul a admet un inverse noté $\frac{1}{a}$
♣ $a\neq 0$; $a\times\frac{1}{a}=1$

3 La division

1. $a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}^*$; $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

2. $a\in\mathbb{R},(b,c,d)\in(\mathbb{R}^*)^3$

a. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ et $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

b. $\frac{\frac{1}{a}}{b}=\frac{b}{a}$, avec $a\neq 0$

c. $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$, avec $bc\neq 0$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ et $k\times\frac{a}{b}=\frac{ak}{b}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

d. $a=\frac{a}{1}$ et $-\frac{1}{b}=\frac{1}{-b}=\frac{-1}{b}$ et $\frac{0}{b}=0$ et $\frac{b}{b}=1$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

e. $\frac{a}{b}=0$ si et seulement si $a=0$ et $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si $ad-bc=0$

4 Racine carrée

Activité

On considère un triangle ABC rectangle en A.

1. Sachant que $AB=3cm$ et $AC=4cm$

a. Calculer la valeur exacte de BC.
b. Quels sont les nombres qui ont pour carrée 25 ?

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

c. Compléter la phrase suivante :

BC est le nombre positif dont le carrée est ...

2. On suppose maintenant que $AB = 2cm$ et $AC = 3cm$. Compléter la phrase suivante :

BC est le nombre positif dont le carrée est ...

3. Rechercher la valeur exacte de BC.
On dira que la valeur exacte de Bc est la racine carrée de 13 que l'on notera $\sqrt{13}$

Définition

a est un nombre positif. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carrée est égal à a.

• Exemple

$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{9} = 3$; ...; $\sqrt{225} = 15$

Remarque

Un nombre négatif n'a pas de racine carrée. Ainsi, si x est réel, l'écriture $\sqrt{x-1}$ n'a pas de sens que si $x - 1 \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \geqslant 1$

Propriété

1. Pour tout nombre x positif ou nul, on a : $\sqrt{x}^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$
2. Soient a et b sont deux nombres réels positifs, on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad et \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \; b \neq 0$$

Remarque

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad et \quad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Contre exemple :

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \quad mais \quad \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

• Exemple

1. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
2. $5\sqrt{72} = 5\sqrt{36 \times 2} = 5 \times 6\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3. $\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{9\times 3}}{2} = \dfrac{\sqrt{9}\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

5 Identité remarquables

Activité

A. **1.** Construire un segment de longueur $\sqrt{5}$

2. On pose : $a = \sqrt{3}\left(1+\sqrt{6}\right)$ et $b = 3-\sqrt{6}$

a. Calculer a^2 et b^2 .

b. Montrer que a^2+b^2 est un nombre entier naturel.

c. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = a$ et $AC = b$. Calculer AB

B. Sans trop de calculs, montrer que :

1. $2^{64}-1 = 255\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)\left(2^{32}+1\right)$

2. $(333333)^2+(444444)^2 = (555555)^2$

3. $(499999)^2+999999 = 25\times 10^{10}$

4. $(999999)^2+(2000)^2 = (1000001)^2$

Il y a 7 formules, à connaître par coeur :

1. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

3. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

4. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

5. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

6. $a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

7. $a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Remarque

♣ On peut déduire le développement de $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$, en remarquant que :

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 \quad et \quad (a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$$

♣ On utilise les identités remarquables pour :

▷ Développer et factoriser ;

▷ Faire un calcul mental, par exemple : $19^2 = (20-1)^2$

♣ Pour factoriser une expressions, on doit :

▷ Identifier une identité remarquable ;

▷ Identifier un facteur commun.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Développement :

1. $3(2x+5y) = 3\times 2x + 3\times 5y = 6x+15y$
2. $-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}x-4y\right) = -\sqrt{2}\times\sqrt{3}x + \sqrt{2}\times 4y = -\sqrt{6}x+4\sqrt{2}y$
3. $(2a+3)^2 = (2a)^2 + 2(2a)\times 3 + 3^2 = 4a^2+12a+9$
4. $(7a-3b)^2 = (7a)^2 - 2(7a)(3b) + (3b)^2 = 49a^2 - 42ab + 9b^2$
5. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = (\sqrt{3})^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3-2 = 1$

Factorisation :

1. $13x+26 = 13\times x + 13\times 2 = 13(x+2)$
2. $4(x-2)+(x+3)(x-2) = (x-2)\left[4+(x-3)\right] = (x-2)(x+1)$
3. $81x^2-49 = (9x)^2 - 7^2 = (9x-7)(9x+7)$
4. $x^2+2x-y^2+1 = \left(x^2+2x+1\right)-y^2 = (x-1)^2-y^2 = (x-1-y)(x+1+y)$

6 Puissance du nombre 10

Activité

Écrire les nombres suivants sous la forme $a.10^n$ où n est un nombre entier relatif et a un nombre rationnel.

A= $0,05\times 0,0006$

B= $(0,05)^2\times(0,02)^2\times 10^{-7}$

C= $10^{-8}\times(0,006)^{-4}$

D= $(0,00004)^{11}\times\dfrac{1}{5}$

Définition

Soit n un nombre entier naturel. On a :

$$10^n = 1\underbrace{000...00}_{n \text{ zéro}} \quad et \quad 10^{-n} = \underbrace{0,000...0}_{n \text{ zéro}}1$$

• Exemple

$$10^4 = 10000 \quad et \quad 10^{-4} = 0,0001$$

Remarque

♣ Les puissances de 10 sont utilisés dans l'écriture des nombres décimaux dont les valeurs sont soit très grandes (**Astronomiques**) ou très petites (**Microscopiques**)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

a Écriture scientifique

Définition

Soit a un nombre décimal et n un entier relatif.
L'écriture $x = a.10^n$ ou $x = -a.10^n$ s'appelle écriture scientifique de x avec $1 \leqslant x < 10$

• Exemple

1. $a = 3452 = 3,452 \times 10^3$
2. $b = 0,00000234 = 2,34 \times 10^{-6}$
3. $c = 678,25 \times 10^5 = 6,7825 \times 10^2 \times 10^5 = 6,7825 \times 10^7$

b Ordre de grandeur

♣ Le nombre a peut s'écrire $a = e + d$ où $e \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant e < 10$ et $d \in \mathbb{D}$ vérifie $0 \leqslant d \leqslant 1$
♣ Le nombre $e.10^p$ **est appelé ordre de grandeur** de $a.10^p$
♣ L'ordre de grandeur permet de prévoir le nombre de chiffres du résultat et de donner ainsi une approximation préalable de ce résultat.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today