ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normale juin 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales PC et SVT**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices et problème :

- Exercice 1 : **fonctions numériques** ..... **2 points**
- Exercice 2 : **suites numériques** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **5 points**
- Problème : **Etude d'une fonction numérique et Calcule intégrale** ... **9 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2 pts)

0,5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

0,5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leqslant 0$

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

0,5 pt **2 -** Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1, 0]$

Exercice 2 : (4pts)

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par : $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\mathcal{U}_n}{3 - 2\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 pt **1 -** Calculer $\mathcal{U}_1$

0,5 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < \mathcal{U}_n < \frac{1}{2}$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} \leqslant \frac{1}{2}$

0,5 pt **b)** En déduire la monotonie de la suite $(\mathcal{U}_n)$

0,75 pt **4 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < \mathcal{U}_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite $\mathcal{U}_n$.

0,5 pt **b)** On pose $\mathcal{V}_n = \ln(3 - 2\mathcal{U}_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{V}_n$

0,5 pt **5 - a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{\mathcal{U}_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{\mathcal{U}_n} - 1\right)$

0,5 pt **b)** En déduire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 3 : (5 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2 - Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

0,25 pt **a)** Ecrire a sous forme algébrique .

0,25 pt **b)** Vérifier que $\overline{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\overline{a}$.

0,5 pt **3 -** Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4 - Soient zl'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,5 pt **a)** Ecrire z' en fonction de z et a

0,25 pt **b)** Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$.

0,5 pt **c)** Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange.

0,75 pt **5 - a)** Vérifier que $d - b = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$

Yassine Elamri

0,5 pt **b)** Ecrire le nombre $1-b$ sous forme trigonométrique.

0,5 pt **c)** Déduire une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}}\right)$

Problème : (9 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x\ln x - 2x \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité : $1cm$)

0,5 pt **1 -** Montrer que f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.

0,75 pt **3 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$

0,5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$.

1 pt **b)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (on prend : $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,5$)

0,5 pt **5 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x\ln x = \dfrac{1+e^2}{4}dx$

0,5 pt **b)** En déduire : $\int_1^e f(x)dx$

0,5 pt **6 - a)** Déterminer le minimum de f sur $]0,+\infty[$

b) En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\ln x \geqslant \dfrac{x-1}{x}$.

7 - Soit $g$la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

0,75 pt **b)** Construire dans le même repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}

8 - On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = x + 3x \ \ ; \quad x \leqslant 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x \ \ ; \quad x > 0 \end{cases}$

0,5 pt **a)** Etudier la continuité de h au point 0

0,5 pt **b)** Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

0,25 pt **c)** La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

FIN

Yassine Elamri