Les puissances

I Puissance d'un nombre réel

1 Définition

Définition

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\ fois}$$

la puissance n de a → $\{a^n$ ← l'exposant, ← la base

Remarque

- a^n se lit : a puissance n ou a exposant n
- $a^0 = 1$ avec $(a \neq 0)$ et $a^1 = a$
- $0^n = 0$ avec $(n \neq 0)$ et $1^n = 1$
- $(-1)^n = \begin{cases} 1 & si\ \ n\ \ pair \\ -1 & si\ \ n\ \ impair \end{cases}$

Exemples

- $2022^0 = 1$
- $2023^1 = 2023$
- $0^{2022} = 0$
- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- $\sqrt{2}^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$
- $\left(-\sqrt{2}\right)^4 = \left(-\sqrt{2}\right) \times \left(-\sqrt{2}\right) \times \left(-\sqrt{2}\right) \times \left(-\sqrt{2}\right) = 4$

Yassine Elamri

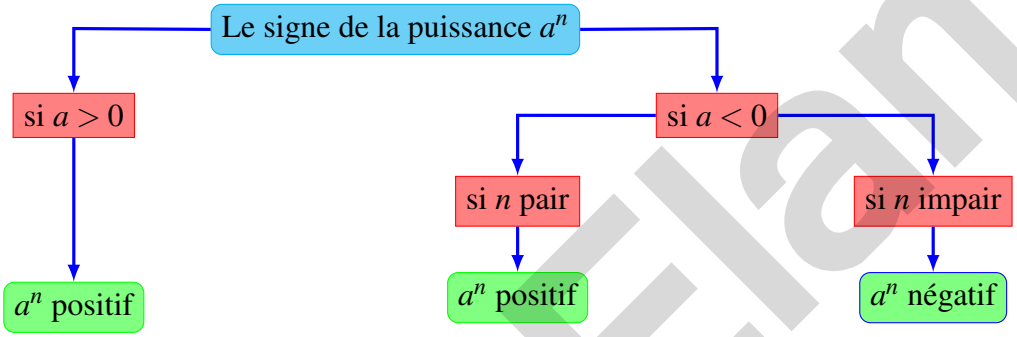
https://steinmath.com

2 Le signe d'une puissance

a Proposition

Proposition

Soit a un nombre réel, et n un entier naturel non nul



EXEMPLES

- $\sqrt{7}^3 > 0$ car la base $\sqrt{7}$ est positif
- $\left(-\sqrt{11}\right)^{124} > 0$ car l'exposant 124 est pair
- $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)^{11} < 0$ car la base $-\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ est négatif et l'exposant 11 est impair
- $-\sqrt{5}^{12} < 0$ car la base est $\sqrt{5}$ et pas $-\sqrt{5}$

b Remarques importantes

Remarque

a est un nombre réel non nul, et n un entier naturel

- Si n est pair, alors : $(-a)^n = a^n$
- Si n est impair, alors : $(-a)^n = -a^n$

Application

Calculer :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

→ $a = (-4)^3$

→ $b = -2^4$

→ $c = -\left(\frac{-2}{3}\right)^3$

→ $d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3$

→ $e = -\left(-\sqrt{5}\right)^2$

→ $f = \left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2$

Solution

→ $a = (-4)^3$
$= -4^3$
$= -64$

→ $b = -2^4$
$= -16$

→ $c = -\left(\frac{-2}{3}\right)^3$
$= --\left(\frac{2}{3}\right)^3$
$= \frac{8}{27}$

→ $d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3$
$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= \frac{16}{25} - \frac{1}{8}$
$= \frac{128-25}{200}$
$= \frac{103}{200}$

→ $e = -\left(-\sqrt{5}\right)^2$
$= -\left(\sqrt{5}\right)^2$
$= -5$

→ $f = \left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2$
$= \left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2$
$= \left(\sqrt{16}\right)$
$= 4$

II Puissance à exposant négatif

1 Définition

Définition

Soient a et b deix nombres réels non nuls et n un nombre entier naturel

- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Exemples

✿ $\sqrt{2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}^1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

✿ $\left(\frac{-3}{\sqrt{5}}\right)^{-2} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2} = \frac{5}{9}$

✿ $\left(3+\sqrt{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)} = \frac{3-\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$

III Les opérations sur les puissances

1 Activités

Activité

1 Écrire les nombres suivants sous forme d'une puissance du nombre 2

$A = 2^5 \times 2^3$; $B = 16^5$; $C = 8^3 \times 4^{32}$

2 Écrire le nombre suivant sous forme $2^n \times 3^p$ avec n et p deux nombres entiers relatifs

$D = \frac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4}$

Solution

1 Écrivons sous forme de puissance de 2

$A = 2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

$B = 16^5 = (2^4)^5 = 2^{4\times5} = 2^{20}$

$C = 8^3 \times 4^{32} = (2^3)^3 \times (2^2)^{32} = 2^{3\times3} \times 2^{2\times32} = 2^9 \times 2^{64} = 2^{9+64} = 2^{73}$

2 Écrivons sous forme de $2^n \times 3^p$

$D = \frac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4} = \frac{(2^3)^2 \times (3^2)^3}{3^5 \times 2^4} = \frac{2^{3\times2} \times 3^{2\times3}}{3^5 \times 2^4} = \frac{2^6 \times 3^6}{3^5 \times 2^4}$

$= 2^{6-4} \times 3^{6-5} = 2^2 \times 3^1$

2 Propriétés

Propriété

Soient a et b deux nombres réels non nuls, et n et m deux nombres entiers relatifs

➠ $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ➠ $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ ➠ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

➠ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ ➠ $(a^n)^m = a^{n\times m}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

- Si on a la même base, on garde la base
- Si on a le même exposant, on garde l'exposant

EXEMPLES

- $a = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{5}^{-7} = \sqrt{5}^{3+(-7)} = \sqrt{5}^{-4} = \dfrac{1}{\sqrt{5}^4} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$
- $b = \sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}^{-2} \times \sqrt{2}^{-1} = \sqrt{2}^{3-2-1} = \sqrt{2}^0 = 1$
- $c = \dfrac{5^8}{5^{11}} = 5^{8-11} = 5^{-3}\dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$
- $d = \dfrac{\sqrt{7}^3}{\sqrt{7}^{-2}} = \sqrt{7}^{3-(-2)} = \sqrt{7}^{3+2} = \sqrt{7}^5 = \sqrt{7}^4 \times \sqrt{7} = \left(\sqrt{7}^2\right)^2 \times \sqrt{7} = 7^2 \times \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$
- $e = \left(\sqrt{7}^2\right)^{-3} = \sqrt{7}^{2\times(-3)} = \sqrt{7}^{-6} = \dfrac{1}{\sqrt{7}^6} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{7}^2\right)^3} = \dfrac{1}{7^3} = \dfrac{1}{343}$
- $f = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}^4\right)^2 = \left(\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}^2\right)^2\right)^2 = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}^2\right)^{2\times 2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\times 2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16}$
- $g = \sqrt{5}^3 \times \sqrt{7}^3 = \left(\sqrt{5}\times\sqrt{7}\right)^3 = \sqrt{5\times 7}^3 = \sqrt{35}^3 = \sqrt{35}^2 \times \sqrt{35} = 35\sqrt{35}$
- $h = 3^{-2} \times \sqrt{3}^{-2} \times \sqrt{2}^{-2} = \left(3\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^{-2} = \left(3\times\sqrt{6}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(3\sqrt{6}\right)^2} = \dfrac{1}{3^2\sqrt{6}^2} = \dfrac{1}{9\times 6} = \dfrac{1}{54}$
- $i = \dfrac{\sqrt{45}^3}{\sqrt{5}^3} = \left(\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{45}{5}}^3 = \sqrt{\cancel{5}\times 9}^{\cancel{3}} = \sqrt{9}^3 = 3^3 = 27$
- $j = \dfrac{25^{-2}}{15^{-2}} = \left(\dfrac{25}{15}\right)^{-2} = \left(\dfrac{\cancel{5}\times 5}{\cancel{5}\times 3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{9}{25}$

3 Exercice d'application

Application

Soient a et b deux nombres réels non nuls et $a \neq 3$
Simplifier ce qui suit :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

➠ $A = \dfrac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4}$ ➠ $B = \dfrac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3}$ ➠ $C = \left[1 + \left(\dfrac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$

Solution

Simplifions les expression suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 \times (a^5)^3}{(a \times a^2)^4} \\ &= \frac{a^2 \times a^{5\times 3}}{a^4 \times a^{2\times 4}} \\ &= \frac{a^2 \times a^{15}}{a^4 \times a^8} \\ &= \frac{a^{2+15}}{a^{4+8}} \\ &= \frac{a^17}{a^12} \\ &= a^{17-12} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^3} \\ &= \frac{a^{-5+(-2)} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{(-2)\times 3}} \\ &= \frac{a^{-7} \times b^{-3}}{a^3 \times b^{-6}} \\ &= a^{-7-3} \times b^{-3+6} \\ &= a^{-10} b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1+a}{3-a}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3-\not{a}+1+\not{a}}{3-a}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{4}{3-a}\right)^{-1} \\ &= \frac{3-a}{4} \end{aligned}$$

IV L'écriture scientifique

1 Puissance de 10

Proposition

Soit n un nombre entier naturel

$10^n = 1\underbrace{00...00}_{n \text{ zeros}}$

$10^{-n} = \underbrace{0.00...00}_{n \text{ zeros}}1$

EXEMPLES

➠ $10^4 = 10000$	➠ $10^{-1} = 0.1$	➠ $10^{-3} = 0.001$
➠ $10^7 = 10000000$	➠ $10^{-2} = 0.01$	➠ $10^{-5} = 0.00001$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Ecriture scientifique

Définition

Soit a un nombre décimal et n un nombre entier relatif
L'écriture $x = a \times 10^n$ ou $x = -a \times 10^n$ s'appelle écriture scientifique de x avec $1 \leqslant a < 10$

EXEMPLES

- $a = 3452 = 3.452 \times 10^3$
- $b = 0.00000234 = 2.34 \times 10^{-6}$
- $c = 678.25 \times 10^5 = 6.7825 \times 10^2 \times 10^5 = 6.7825 \times 10^{2+5} = 6.7825 \times 10^7$
- $d = -0.000981 \times 10^{-9} = -9.81 \times 10^{-4} \times 10^{-9} = -9.81 \times 10^{-4-9} = -9.81 \times 10^{-13}$
- $e = -24.5 \times 10^{-11} \times 1.2 \times 10^3 = -24.5 \times 1.2 \times 10^{-11} \times 10^3 = -29.4 \times 10^{-11+3} = -2.94 \times 10^{\times} 10^{-8} = -2.94 \times 10^{1-8} = -2.94 \times 10^{-7}$
- $f = \dfrac{25.5 \times 10^{-16}}{0.05 \times 10^3} = \dfrac{25.5}{0.05} \times 10^{-16-3} = 510 \times 10^{-19} = 5.1 \times 10^2 \times 10^{-19} = 5.1 \times 10^{2-19} = 5.1 \times 10^{-17}$
- $g = -113 \times 10^5 + 7.2 \times 10^7 = -113 \times 10^5 + 7.2 \times 10^2 \times 10^5 = -113 \times 10^5 + 7.2 \times 100 \times 10^5 = -113 \times 10^5 + 720 \times 10^5 = (-113 + 720) \times 10^5 = 607 \times 10^5 = 6.07 \times 10^2 \times 10^5 = 6.07 \times 10^{2+5} = 6.07 \times 10^7$

Mèthode

Pour trouver l'écriture cecientifique d'un nombre réel, on glisse la virgulr jusqu'on trouve un nombre entre 1 et 10.

✓ Glissement à droite → Exposant négatif

✓ Glisseent à gauche → Exposant positif

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today