Projection dans le plan

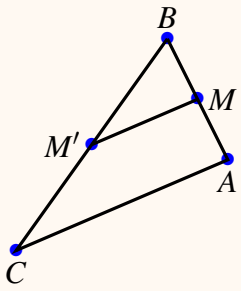
I projection d'un point sur une droite

Activité

Soit ABC un triangle et M et M' sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

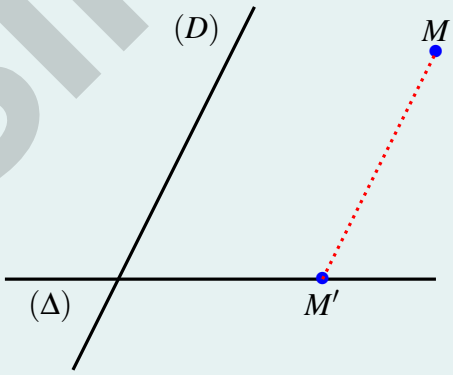
- Montrer que $(BC)\|(MM')$.

Le point M est appelé projeté du point M' sur la droite (AC) parallèlement à la droite (AB).



Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes dans le plan et M un point du plan .
La droite passant par le point M et parallèle à la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point M'.
Le point M' est appelé projeté du point M sur la droite (D) parallèlement à la la droite (Δ).
On écrit $p(M) = M'$.
p est appelé projection sur la droite (D) parallèlement à la la droite (Δ).



Remarque

1. Le point M' est la projection du point M sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) signifie que $M' \in (D)$ et $(MM')\|(\Delta)$.
2. La projection d'un point de la droite (D) sur la même droite parallèlement à la droite (Δ) est lui même. On dit dans ce cas que tout les points de la droite (D) sont invariants par la projection sur (D) parallèlement à la droite (Δ).

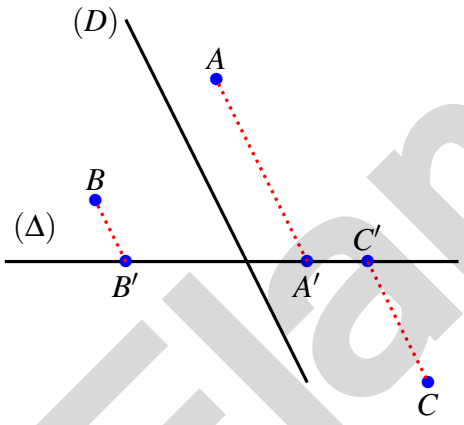
Yassine Elamri

3 La projection d'un point M sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) ne change pas si on remplace la droite (Δ) par une droite parallèle à (Δ).

Exemple

On considère la figure suivante :
Soit p la projection sur la droite (Δ) parallèlement à la droite (D).
Déterminons $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$

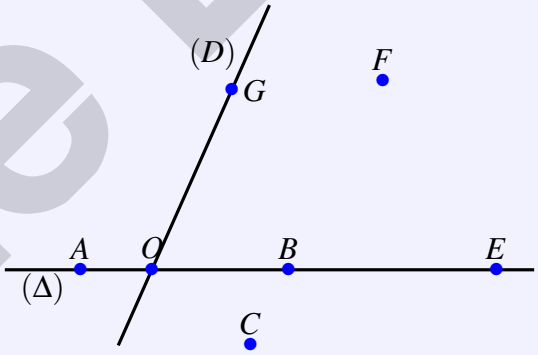
- On a $(AA')\|(D)$ et $A' \in (\Delta)$
  Alors $p(A) = A'$.
- On a $p(B) = B'$
  car $(BB')\|(D)$ et $B' \in (\Delta)$.
- On a $(CC')\|(D)$ et $C' \in (\Delta)$
  Alors $p(C) = C'$.



Application

On considère la figure suivante :

- les points B , C et F sont alignés
- La droite (BC) est parallèle à (D)
- Les points A , B et E appartient à (Δ).
- le point O le point d'intersection des droites (Δ) et (D) .
- Le point G appartient à la droite (D).



1 Déterminer les projections des points A , B , C ,G , O ,E et F sur la droite (Δ) parallèlement à la droite (D).

2 Déterminer les projections des points A , B et O et E sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ).

3 Construire les projections des points F et C sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) .

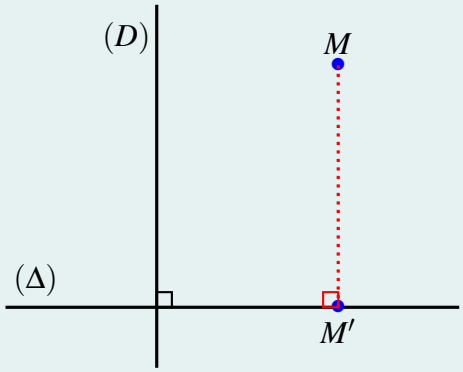
1 Projection orthogonale

Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites perpendiculaires dans le plan .
Le point M' projeté du point M sur la droite (D) parallèlement à (Δ) est appelé projeté orthogonale du point M sur la droite (D).

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

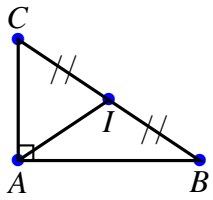


Remarque

La projection orthogonale est un cas particulière de la projection sur une droite parallèlement à une droite.

• Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en A et I le milieu de segment $[BC]$.



1 Déterminons le projeté orthogonale du point C sur la droite (AC) .
On a $(AB)\perp(AC)$ et $A \in (AC)$.
Alors le point A est le projeté orthogonale du point C sur la droite (AC) .

2 Déterminons le projeté orthogonale du point A sur la droite (BC).
On a $(AI)\perp(BC)$ et $I \in (BC)$ car ABC un triangle rectangle en A et I milieu de $[BC]$.
Alors le projeté orthogonale du point A sur la droite (BC) est le point I.

Application

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O et I le milieu du segment $[AD]$.

1 Déterminer le projeté orthogonale des points A , O et C sur la droite (AD) .

2 Déterminer le projeté orthogonale des points A , I , B, C et D sur la droite (AC) .

3 Construire les projetés orthogonale des points A , I et C sur la droite (BD) .

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Théorème de Thalès et son théorème réciproque

1 Théorème de Thalès sens indirect

T **Théorème**

Soient A , B ,C ,M et N cinq points du plan
Si A ,B et M sont trois points alignés , A ,N et C sont trois points alignés et $(MN)\|(BC)$ alors

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{NM}{CB}$$

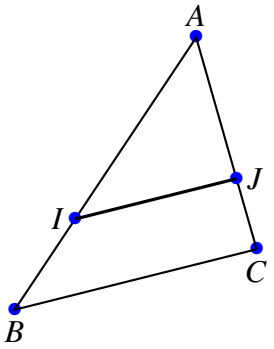
Remarque

- Le théorème directe de **Thalès** s'applique pour calculer des longueur.
- Traduction vectorielle du théorème directe de **Thalès** :
  Si les points A, M et B sont alignés, les points A, M et B sont alignés et $(BC)//(MN)$.
  Alors : $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{BC}\end{cases}$ tel que k est le même nombre réel dans les trois égalités vectorielle.

• Exemple

Soit ABC un triangle tel que $AB=18cm$ et $BC=12cm$ et soient I un point de segment $[AB]$ tel que $AI=6cm$ et J un point de segment $[AC]$ tel que $(JI)\|(BC)$.

- Calculons la distance IJ.
  On a $(IJ)\parallel(BC)$.
  Alors $\frac{AI}{AB}=\frac{IJ}{BC}$
  Donc $IJ=BC\times\frac{AI}{AB}$
  D'où $IJ=12\times\frac{6}{8}=9cm$.



Yassine Elamri

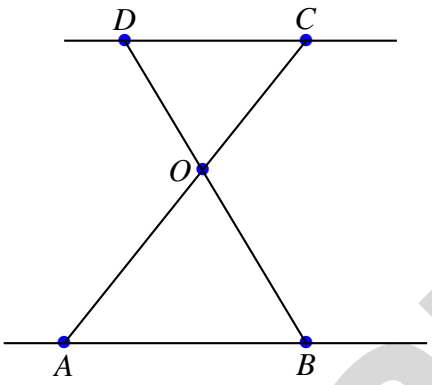
Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

Dans la figure ci-contre , on a

- $(AB) \parallel (CD)$.
- $OA = 2cm$, $OA = 2cm$ et $OA = 2cm$

.



Calculons la distance OC.

2 On a $(AB) \parallel (CD)$.

Alors $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$.

Donc $OC = OA \times \dfrac{OD}{OB}$.

D'où $OC = 12 \times \dfrac{6}{8} = 9cm$.

2 Théorème réciproque de Thalès

T **Théorème**

Soient A , B ,C ,M et N cinq points du plan
Si A ,B et M sont trois points alignés , A ,N et C sont trois points alignés , les les points A ,B et M sont dans le même ordre que les points A ,N et C et $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$
alors

$$(MN) \parallel (BC)$$

.

Remarque

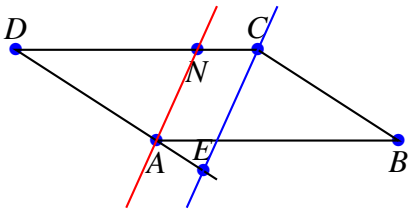
1 Le théorème indirecte de **Thalès** s'applique pour démontrer les droites parallèles.

2 Traduction vectorielle du théorème indirecte de **Thalès** :

Si $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \end{cases}$: alors : $(BC)//(MN)$

Exemple

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 8cm$, $AD = 4.5cm$ et $AE = 1.5cm$ et N un point tel que $\overrightarrow{DN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}$



Montrons que $(EC) \parallel (AN)$
On a les droites (DE) et (DC) sont sécantes en D,

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

les point D,A,E et les points D,N,C ont de même ordre,
or : $\frac{DE}{DA} = \frac{4.5+1.5}{4.5} = \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$
et : $\frac{DC}{DN} = \frac{AB}{\frac{3}{4}DC} = \frac{AB}{\frac{3}{4}AB} = \frac{4}{3}$
alors : $\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DN}$.
Donc d'après le théorème indirecte de **Thalès** : $(EC)//(AN)$.

Application

Soit ADE un triangle tel que $AD = 6cm$ et $AE = 9cm$ et soient B un point de segment $[AD]$ tel que $AB = 4cm$ et C un point de segment $[AB]$ tel que $AC = 6cm$.
Montrer que $(DE)\|(BC)$.

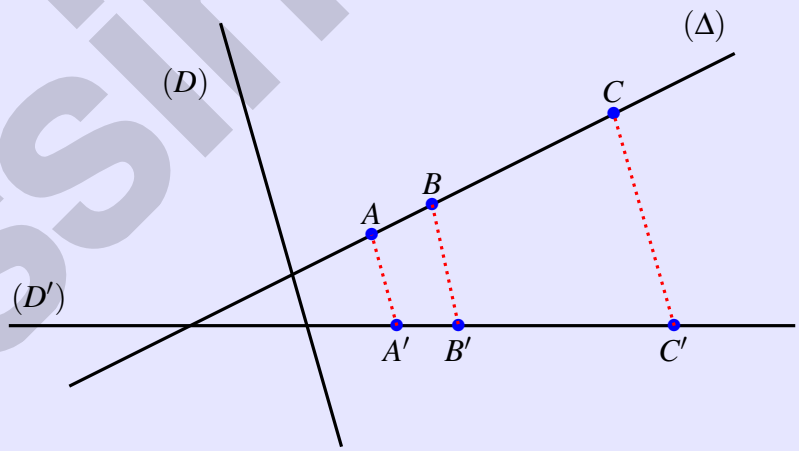
3 Théorème de Thalès avec les projections

T **Théorème**

Soient (D) et (D') deux droites sécantes.
Soit (Δ) une droite non parallèle à la droite (D) et à la droits (D').
Soient A , B et C trois points de la droite (D) tels que A et B soient distincts.
Si les points A' , B' et C' sont respectivement les projetés des points A , B et C sur la droite (D') parallèlement à la droite $((\Delta))$,alors :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

.



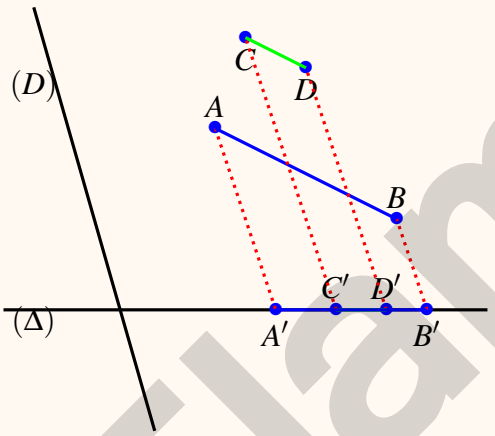
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Conservation du coefficient de colinéarité

Activité

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires tels que : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.
Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes voir la figure



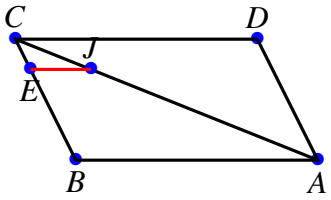
1. Construire le point M tel que $ABMC$ soit un parallélogramme .
2. Montrer que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CM}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.
3. Soient A', B', C' , M' et D', les projetés respectifs des points A, B, C , M et D sur la droite (Δ') parallèlement à la droite (Δ) .
   a. Montrer que $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{C'M'}$ et $\overrightarrow{C'M'} = \overrightarrow{A'B'}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$

Propriété

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes.
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires tels que : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
Si les points A', B', C' et D', sont les projetés respectifs des points A, B, C et D sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) .
Alors : $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.
On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité

• Exemple

Soit $ABCD$ un parallélogramme
et soit J un point du plan tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
et E le projeté du point J sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB)



- Montrons que $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$
  Soit p la projection sur sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB)
  On a $p(A) = B$, $p(I) = E$ et $p(C) = C$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Puisque $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et la projection conserve le milieu de colinéarité

Alors $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

- En déduisons que $\overrightarrow{JE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

  On a $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

  Alors $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

  Par suite

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JE} &= \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CE} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Application

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et M un point tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et soient N le projeté du point M sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AC) et P le projeté du point N sur la droite (CD) parallèlement à la droite (BD).

1. Montrer que $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.
2. Soit Q un point tel que $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.
   Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme

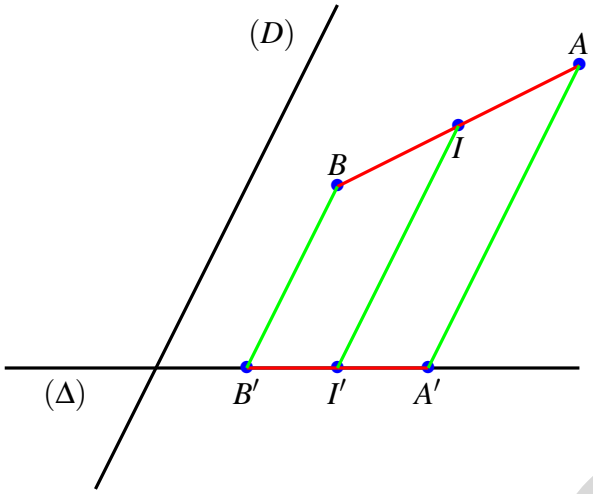
1 Projeté du milieu d'un segment

Propriété

Soient A et B deux points différents, A' et B' leurs projetés respectivement sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) .
Le projeté du milieu du segment $[AB]$ est le milieu du segment $[A'B']$.
On dit que la projection conserve le milieu d'un segment.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

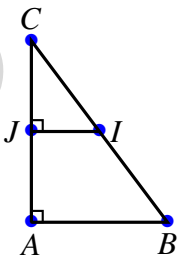


Remarque

La projection conserve le milieu d'un segment est un cas de la projection conserve la coefficient de colinéarité de deux vecteurs

• Exemple

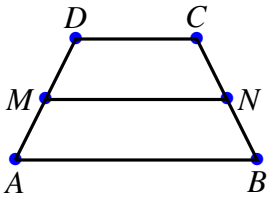
Soit ABC un triangle rectangle en A et I le milieu de segment $[BC]$
Soit J le projeté orthogonale du point I sur la droite (AC)



Montrons que le point J est le milieu du segment $[AC]$
Soit p la projection orthogonale sur la droite (AC).
On a $p(B) = C$, $p(C) = C$ et $p(I) = J$.
or :I est le milieu du segment $[AC]$ et la projection conserve le milieu .
Donc le point J est le milieu du segment $[AC]$.

• Exemple

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$
Soit M le milieu de segment $[AD]$ et N son projeté sur la droite (AB) parallèlement à la droite (BC)



Montrons que le point N est le milieu du segment $[BC]$
Soit p la projection sur la droite (AB) parallèlement à la droite (BC).
On a $p(A) = B$, $p(M) = N$ et $p(D) = C$.
or :M est le milieu du segment $[AD]$ et la projection conserve le milieu .

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Donc le point N est le milieu du segment $[BC]$.

Application

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O
Soient J et J les projetés orthogonale respectifs des points A et C sur la droite (BD)
Montrer que le point O est le milieu de segment $[IJ]$

Exercice

Soit ABC un triangle du plan , I le milieu du segment $[AC]$ et E un point tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
Soit K le point d'intersection des droite (AE) et (IB) .
La droite passant par le point $(E$ et parallèle à la droite (IB) coupe la droite (AC) en point J .

1. Faire la figure
2. Montrer que $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IJ}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AJ} = 4\overrightarrow{IJ}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{KE}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today