Barycentre dans le plan

Série d'exercices Nř2

Exercice 1 :
Soient A et B deux points dans le plan tel que $AB = 10$ cm.

1. Déterminer l'ensemble des nombres réels m tel que le système des points $\left(A; m^2 - 8\right)$ et $(B; -2m + 6)$ a un barycentre.
2. Construire le barycentre G des points pondérés $(A; -7)$ et $(B; 4)\}$.
3. On considère le point H dans le plan tel que : $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Montrer que H est un barycentre d'un système des points pondérés à déterminer.

Exercice 2 :
I–
Soit ABC un triangle et soit α un nombre réel. On considère deux points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \alpha\overrightarrow{CA}$.

1. Faire une figure dans le cas où $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha = -1$.
2. Montrer que $D = \text{Bar}\{(A; 1-\alpha), (B; \alpha)\}$.
3. Montrer que $E = \text{Bar}\{(C; 1-\alpha), (A; \alpha)\}$

II–

1. Construire le point G le barycentre des points pondérés $(A; 1), (B; 4)$ et $(C; -1)$.
2. Déterminer puis construire l'ensemble des points M dans le plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 8$$

Exercice 3 : Soit $ABCD$ un rectangle de centre O.

1. Construire le barycentre I du système des points $(A; 1)$ et $(B; 3)$ et le barycentre K du système des points $(C; 1)$ et $(D; 3)$.
2. En déduire l'ensemble (Γ) des points M tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|$$

3. Montrer que O est le milieu de $[IK]$.
4. Construire le barycentre G du système des points $(A; 1), (B; 1)$ et $(C; 2)$.
   a. Montrer que $G \in [BD]$.
   b. En déduire l'ensemble des points M tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
5. Construire le barycentre J du système des points $(B; 2)$ et $(C; 1)$ et le barycentre L du système des points $(A; 1)$ et $(D; 2)$.
6. Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme de centre O.

Exercice 4 : Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tels que : $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et I le milieu de $[BC]$.
On considère les points J et K définis par : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Yassine Elamri

1. Construire les points J et K.
2. Montrer que $J = \text{Bar}\{(A;a),(C;c)\}$ en déterminant les coefficients a et c.
3. Construire le barycentre G des points pondérés $(A;4),(B;3)$ et $(C;-1)$
4. Le plan est muni au repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
   a. Déterminer les cordonnées des point I,J,K et G.
   b. Montrer que les points I, J et K sont alignés.
   c. Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) des points M dans le plan tel que :
   $$\|4\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$
   d. Soit (E_2) l'ensemble des points M dans le plan tel que :
   $$\|4\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$
      i. Vérifier que $B \in (E_2)$.
      ii. Montrer que $M \in (E_2) \Rightarrow GM = \frac{\sqrt{10}}{6}$ puis construire (E_2).

Exercice 5 :

1. On considère M,E et N trois points non alignés. Soit $H = bar\{(M;3),(E;1),(N;1)\}$, $Q = bar\{(M;3),(N;1)$ et $R = bar\{(M;3),(E;1)\}$.
   a. Démontrer que les droites (EQ) et (NR) passent par H.
   b. Soit P le milieu du segment $[EN]$.
      i. Prouver que M,P et H sont alignés.
      ii. Exprimer $\overrightarrow{PH}$ en fonction de $\overrightarrow{PM}$.
2. On donne un triangle rectangle direct ABC et isocèle en A tel que $AB = AC = a, a > 0$.
   a. Déterminer le point G barycentre du système $\{(A;4),(B;-1),(C;-1)\}$ puis construire G.
   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $4\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 2a^2$.
   c. Construire (E).

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today