Chapitre

# Généralités sur les fonctions numériques(Rappel et compléments)

Cours 1BSM

| Les orientations pédagogiques | Capacités attendues |
|---|---|
| On présentera ce chapitre à partir d'exemples de révisions avec quelques compléments - On construira les courbes représentatives des fonctions de références qui ont été étudiées ainsi que les fonctions : $x \longmapsto \sqrt{x+a}$, $x \longmapsto ax^3$, $x \longmapsto E(x)$ et les fonctions de la forme $f+\lambda$ de la même manière que celle utilisée aux au niveau du tronc commun ; - Les fonctions de type $x \longmapsto E(f(x))$ et de type $x \longmapsto f(E(x))$ sont hors programme ; - On habituera les élèves à déterminer les variations d'une fonction numérique à partir de sa courbe représentative tout en accordant de l'importance à la construction des courbes ; - On traitera la résolution graphique d'équations et d'inéquations de la forme : $f(x)=c$ ; $f(x) \leq c$ ; $f(x)=g(x)$ ; $f(x) \leq g(x)$ ; $f(x)<g(x)$ ; - On utilisera dans la limite de ce qui est disponible les calculatrices et les logiciels pour étudier des fonctions ; - Il est souhaitable de traiter des situations choisies à partir des disciplines de la spécialité . | - Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques ; - Déduire les variations ou les extrémums ou le signe d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou à partir de son tableau de variation ; - Déterminer les variations des fonctions $f+\lambda$ et $\lambda f$ à partir des variations de la fonction $f$ ;- Discuter les solutions d'une équation de type $f(x)=c$ et $f(x)=g(x)$ à partir de la représentation graphique ; - Etude d'équations et d'inéquations en utilisant et en représentant les fonctions . |

| Les prés-requis | Les extensions |
|---|---|
| Généralités sur les fonctions en TCS | L'étude des fonctions |

Yassine Elamri

# I Fonction majorée-Fonction minorée-Fonction bornée

**Activité**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

1. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)<1$
2. L'équation $f(x)=1$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$ ?
3. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)\geq 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$
5. En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ 0\leq f(x)<1$

**Définition**

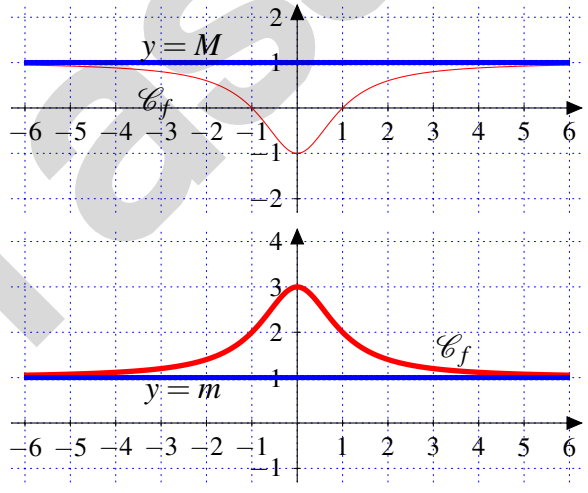
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $D_f$ .

- On dit que $f$ est majorée sur $I$ s'il existe un réel $M$ tel que : $(\forall x\in I), f(x)\leq M$.Le réel $M$ s'appelle un **majorant** de $f$ sur $I$.
- On dit que $f$ est minorée sur $I$ s'il existe un réel $m$ tel que : $(\forall x\in I), f(x)\geq m$.Le réel $m$ s'appelle un **minorant** de $f$ sur $I$.
- On dit que $f$ est bornée sur $I$ s'il existe deux réels $M$ et $m$ tel que : $(\forall x\in I), m\leq f(x)\leq M$

**Propriété**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $D_f$.
La fonction $f$ est bornée sur l'intervalle $I$ si et seulement s'il existe un réel positif $M$ tel que :$(\forall x\in I), |f(x)|\leq M$

## • Exemple




• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la droite d'équation $y := M$.

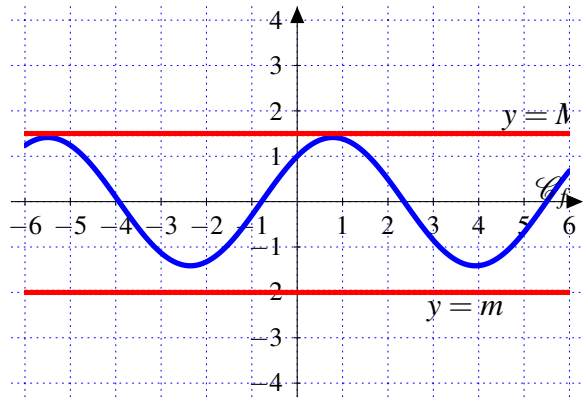
• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y := m$.



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today




• La courbe $\mathscr{C}_f$ est inclus dans la barre définie par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$

**Application**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

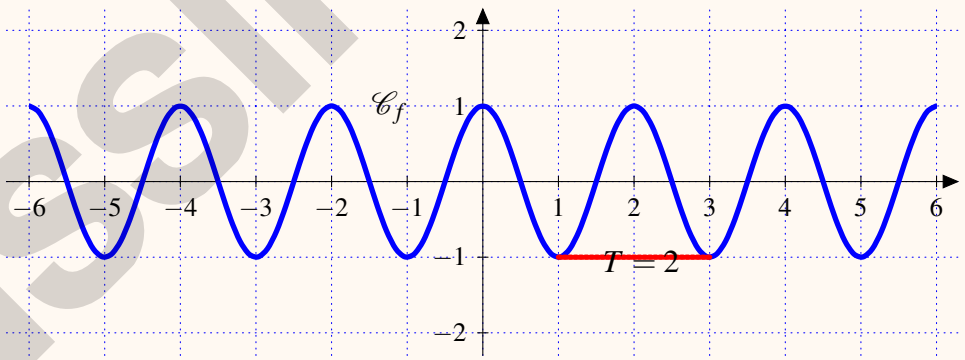
1 Montrer que $f$ est majorée par $\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $g$ est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

## II Fonction périodique

**Activité**

1 On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe représentative ci-dessous :




a Vérifier que : $f(1) = f(3)$ ; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(1) = f(3)$ ;

b Quelle est la relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$ ?

2 La fonction représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(\pi x)$.

a Confirmer les résultats de la question **1-a)**.

b Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x-2) \in \mathbb{R}$ et $(x+2) \in \mathbb{R}$ et $f(x-2) = f(x+2) = f(x)$.**On dit dans ce cas que la fonction $f$ est périodique de période $T = 2$**



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

**Définition**

Une fonction $f$ est dite périodique de période $T$ si et seulement si , pour tout réel $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)$

**Propriété**

- Si la fonction $f$ est périodique de période $T$ alors : $(\forall x \in D_f)(\forall k \in \mathbb{Z}), f(x+kT) = f(x)$.
- Posons : $I_0 = [x_0; x_0+T[$ et $I_k = [x_0+kT; x_0+(k+1)T[$ tels que $x_0 \in D_f$ et $k \in \mathbb{Z}$ et soient $(C_0)$ la courbe de la fonction $f$ sur l'intervalle $I_0$ et $(C_k)$ sa courbe sur l'intervalle $I_k$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. On a :
  - $(C_k)$ est l'image de $(C_0)$ par la translation de vecteur $kT.\vec{i}$.
  - La fonction $f$ a le même sens de variation sur $I_0$ et $I_k$.

## Remarque

Si $f$ est définie sur $D_f$ et périodique de période $T$ alors il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [0;T]$ ou $D_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

## Exemple

- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$ ;
- La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$ ;
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période $T = \pi$.

**Application**

Soit $f$ une fonction périodique de période $T = 3$ et définie sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1. Calculer $f(2020)$ et $f(1441)$.
2. Déterminer l'expression $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

**Application**

1. Soit $a$ un réel strictement positif. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont périodiques et de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes : $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ et $g : x \mapsto \sin(2x)$



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

## III Extremums d'une fonction

### Définition

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $D_f$ et $x_0 \in I$.

- $f(x_0)$ est le **minimum** de $f$ sur $I$ si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \geq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \min\limits_{x \in I} f(x)$
- $f(x_0)$ est le **maximum** de $f$ sur $I$ si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \leq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \max\limits_{x \in I} f(x)$.
- Le maximum et le minimum sont appelés les **extremums** de la fonction $f$.

### Application

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1 Montrer que $\frac{1}{2}$ est une valeur maximale de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $-\frac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

## IV Monotonie d'une fonction

### Définition

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. ▷ $f$ est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

▷ $f$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.

▷ $f$ est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

▷ $f$ est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

▷ $f$ est monotone sur $I$ si elle est croissante ou décroissante sur $I$.

▷ $f$ est strictement monotone sur $I$ si elle est strictement croissante ou décroissante sur $I$.

### 1 Taux de variations :

### Définition

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ et soient $a$ et $b$ deux nombres distincts de l'intervalle $I$.

Le nombre $T(a;b) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle le taux de variation de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ .



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

**Propriété**

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ .

- $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si, quels que soient les nombres distinct $a$ et $b$ de $I$ on a : $T(a;b) \geq 0$
- $f$ est strictement croissante sur $I$ si et seulement si, quels que soient les nombres distinct $a$ et $b$ de $I$ on a : $T(a;b) > 0$
- $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si, quels que soient les nombres distinct $a$ et $b$ de $I$ on a : $T(a;b) \leq 0$
- $f$ est strictement décroissante sur $I$ si et seulement si, quels que soient les nombres distinct $a$ et $b$ de $I$ on a : $T(a;b) < 0$

**Propriété**

Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $D_f$ symétrique par rapport à 0 et soient $I \subset D_f \cap \mathbb{R}^+$ et $I'$ son symétrique par rapport à 0.

- Soit $f$ paire, on a : si $f$ est croissante sur $I$ alors $f$ est décroissante sur $I'$ et si $f$ est décroissante sur $I$ alors $f$ est croissante sur $I'$
- Soit $f$ impaire, on a : si $f$ est croissante sur $I$ alors $f$ est croissante sur $I'$ et si $f$ est décroissante sur $I$ alors $f$ est décroissante sur $I'$

**Proposition (Sens de variation de la fonction $f+\lambda$)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $\lambda$ un réel. Si $f$ est monotone sur $I$ alors $f$ et $f+\lambda$ ont même sens de variation sur $I$.

**Proposition (Sens de variation de la fonction $\lambda f$)**

Soit $f$ une fonction définie et monotone sur un intervalle $I$ et $\lambda$ un réel.

- Si $\lambda > 0$ alors les fonctions $f$ et $\lambda f$ ont même sens de variation sur $I$.
- Si $\lambda < 0$ alors les fonctions $f$ et $\lambda f$ ont des sens de variation contraires sur $I$.

**Application**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$

1. Montrer que la fonction $f$ est paire.
2. Montrer que la fonction $f$ est minorée par le nombre 2.
3. Montrer que la fonction $f$ est croissante sur $]1;+\infty[$ et décroissante sur $[0;1]$ .
4. En déduire les variation de la fonction $f$ sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $]-1;0]$ .



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

# V Composition de deux fonctions

**Activité**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par : $f(x=x^2+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$.

1. Déterminer $D_f$ et $D_g$ puis donner le tableau de variations de $f$ et celui de $g$.
2. Calculer $h(x)=g(f(x))$
3. Déterminer $D_h$ puis donner le tableau de variations de $h$.
4. Comparer les monotonies des fonction $f$, $g$ et $h$.

**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur $D_f$ et $g$ une fonction définie sur $D_g$. On pose : $D=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f$ et $f(x)\in D_g\}$. La fonction $h$ définie sur $D$ par $h(x)=g(f(x))$ est appelée fonction composée de $f$ suivie de $g$ notée $g\circ f$ .

## Remarque

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f$ et $f(x)\in D_g\}$ ou $x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $x\in D_f$ et $f(x)\in D_g$

## • Exemple

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-1$ et $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+3$. Définir $g\circ f$ et $f\circ g$. Sont-elles égales ?

- $g\circ f$ est définie sur $[0;+\infty[$ par $g\circ f(x)=g(f(x))=(\sqrt{x}-1)^2+3=x-2\sqrt{x}+4$
- $f\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f\circ g(x)=f(g(x))=\sqrt{x^2+3}-1$
- $g\circ f$ et $f\circ g$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de définition.On peut aussi remarquer que $g\circ f(0)\neq f\circ g(0)$

**Propriété**

Soit $f$ une fonction définie et monotone sur un intervalle $I$. Soit $g$ une fonction définie et monotone sur un intervalle $J$ et telle que pour tout $x\in I$, $f(x)\in J$.

- Si $f$ et $g$ ont même sens de variation alors $g\circ f$ est croissante sur $I$.
- Si $f$ et $g$ ont des sens de variation contraires alors $g\circ f$ est décroissante sur $I$.

**Application**

1. Ecrire, sous forme d'une composition de deux fonctions, les fonctions suivantes : $f(x)=(x-1)^2$ ; $g(x)=\sqrt{2-5x}$ ; $h(x)=3-\frac{1}{(2x-1)^2}$.
2. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x)=-2x+1$ et $g(x)=\dfrac{1-2x}{x-1}$



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

a Donner le tableau de variation de la fonction $f$ et celui de $g$ .

b Déterminer la monotonie de la fonction $g \circ f$ sur les intervalles : $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

# VI Représentation graphique des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ et $x \longmapsto ax^3$ et $x \longmapsto E(x)$

**Définition**

La courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x;f(x))$ où $x$ parcourt le domaine de définition $D$ de la fonction $f$.Elle est souvent notée $\mathscr{C}_f$
L'équation de cette courbe représentative est : $y = f(x)$.
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une parabole et celle de la fonction inverse une hyperbole.

## 1 Étude de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$

**Activité**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Déterminer $D_f$.

2 Étudier les variations de $f$.

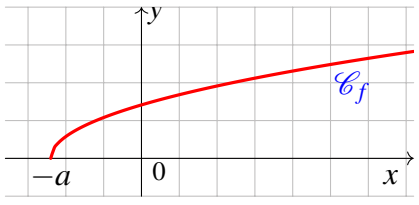
3 Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 0$ et pour $a = 2$.
**(On remarque que la courbe $\mathscr{C}_2$ est une image de $\mathscr{C}_0$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$)**

**Propriété**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$ .

- L'ensemble de définition de la fonction $f$ est : $D_f = [-a;+\infty[$.
- La fonction $f$ est croissante sur $D_f$.
- Tableau de variations et représentation graphique :

| $x$ | $-a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | ↗ |




## 2 Étude de la fonction $x \longmapsto ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$

**Activité**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

1. Étudier la parité de $f$.
2. Étudier les variations de $f$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 1$.

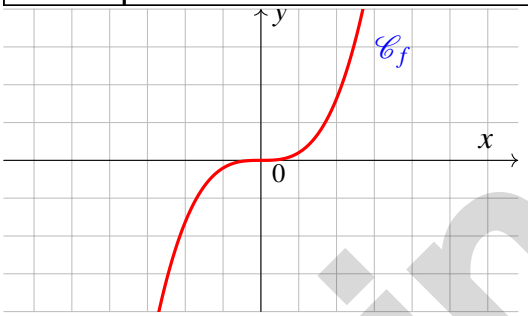
**Propriété**

Soit $f$ la fonction par $f(x) = ax^3$ tel que $a \neq 0$ .

- L'ensemble de définition de la fonction $f$ est : $D_f = \mathbb{R}$.
- La fonction $f$ est impaire.
- Tableau de variations et représentation graphique :

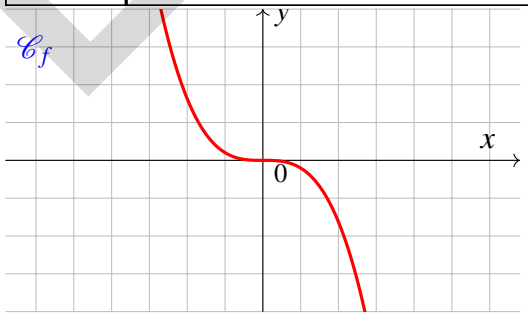
Si $a > 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |




Si $a < 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | |




## 3 Étude de la fonction $x \longmapsto E(x)$

**Activité**

Soit $x$ un réel. Compléter le tableau suivant on détermine le nombre entier relatif $p$ $(p \in \mathbb{Z})$ tel que $p \leq x < p+1$

| x | 4,5 | 0,7 | −0,3 | −4,1 |
|---|---|---|---|---|
| p | | | | |

**(Le nombre entier relatif s'appelle la partie entière relative du nombre réel $x$, on note $p = E(x)$ ou encore $p = [x]$)**

**Définition**

Soit $x$ un nombre réel. Le nombre entier relatif $p$ qui vérifie $p \leq x < p+1$ s'appelle la partie entière relative du nombre réel $x$, on note $p = E(x)$ ou encore $p = [x]$.



Yassine Elamri



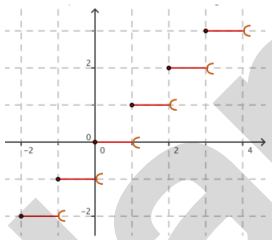
Today better than yesterday, tomorrow better than today

## • Exemple

$E(5)=5$ ; $E(-3.2)=-4$ ; $E(6.9)=6$ ; $E(\frac{7}{3})=2$ ; $E(-\frac{7}{3})=-3$

**Propriété**

- $\forall x \in [p;p+1]$ ; $E(x)=p$
- $\forall x \in \mathbb{Z}$ ; $E(x)=x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $E(x) \leq x < E(x)+1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ ; $E(x+k)=E(x)+k$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $x-1 < E(x) \leq x$
- C-centre, La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto E(x)$ :



**Application**

Soit f est la fonction définie par $f(x)=2x-E(x)$
On considère les intervalles $I_k$ tel que $I_k=[k;k+1]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1. Déterminer l'expression de $f(x)$ sur $I_k$
2. Construire $C_0$ la courbe de $f$ sur $I_0=[0;1]$
3. Déduire les courbes $C_k$ de $f$ sur $I_k=[k;k+1]$

Yassine Elamri





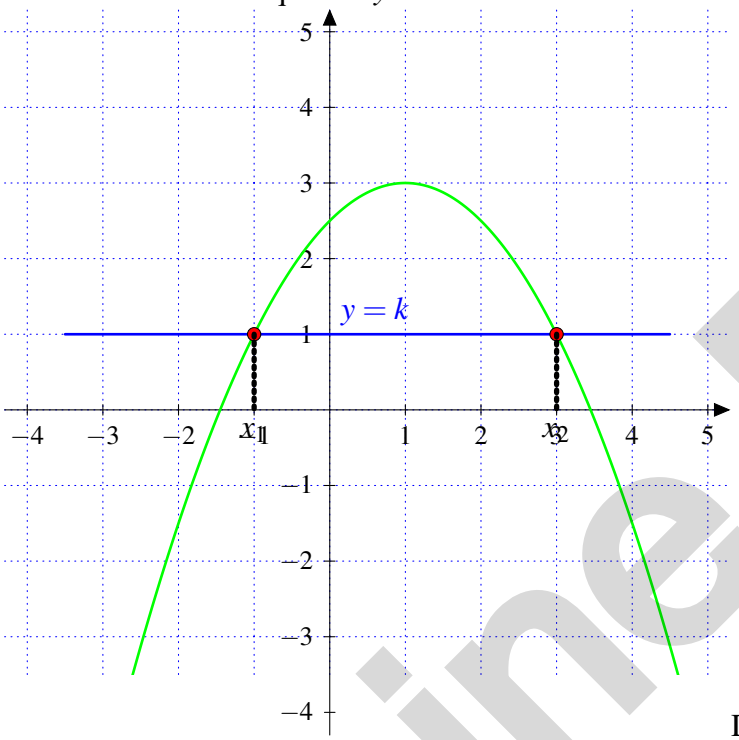
Today better than yesterday, tomorrow better than today

# VII Comparaison de deux fonctions

## 1 Résolution d'une équation

### a Résolution d'équation $f(x) = k$

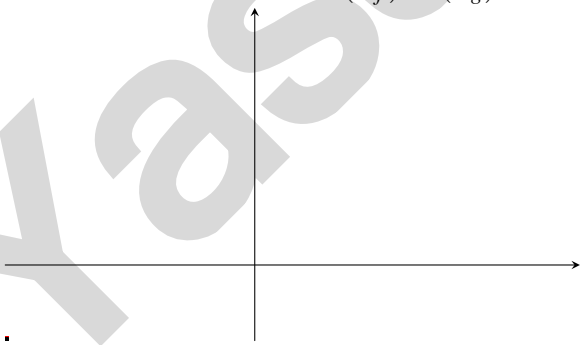
On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.




Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1; x_2\}$

### b Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

On trace les deux courbes $(C_f)$ et $(C_g)$ et on lit les abscisses des points d'intersection.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1; x_2\}$

Yassine Elamri

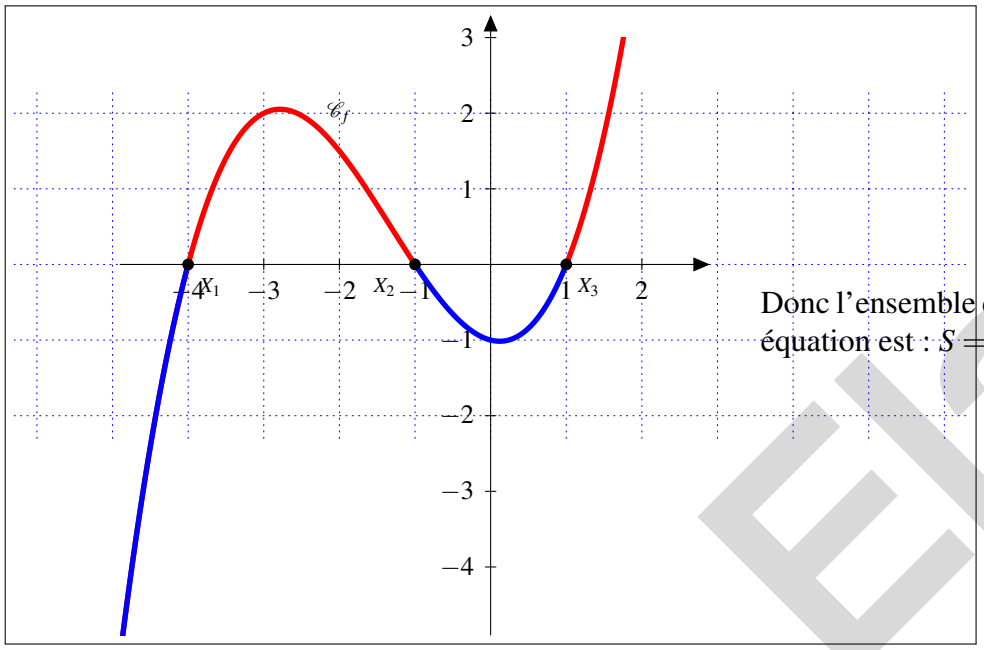




Today better than yesterday, tomorrow better than today

## 2 Résolution d'une inéquation

### a Résolution d'inéquation $f(x) > 0$




Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S = ]X_1 ; X_2[ \cup ]X_3 ; +\infty[$

### b Résolution d'inéquation $f(x) \leq g(x)$

**Activité**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = x$.

1. Déterminer $D_f$ et $D_g$.
2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Comparer $f$ et $g$.

**Définition**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions. On dit que $f$ et $g$ sont égales et on note $f = g$ si : $D_f = D_g = D$ et $(\forall x \in D) \quad f(x) = g(x)$

**• Exemple**

Les fonctions $u$ et $v$ sont-elles égales ?

1. $u$ et $v$ sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$
2. $u$ et $v$ sont définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$



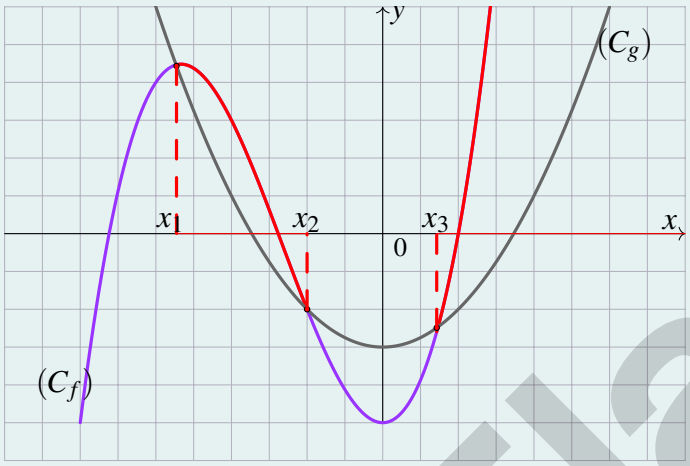
Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today

**Définition**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ tel que $I \subset D_f \cap D_g$.
On dit que $f$ est supérieure ou égale à $g$ sur $I$ si et seulement si : $(\forall x \in I)\ \ f(x) \geq g(x)$




On a : $\forall x \in [x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[;\ f(x) \geq g(x)$
Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est : $[x_1;x_2] \cup [x_3;+\infty[$
l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est : $]x_1;x_2[\cup]x_3;+\infty[$

## Remarque

L'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est un cas particulier d'inéquation $f(x) \leq g(x)$ avec $g$ la fonction constante $g(x) = k$

**Application**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Donner le tableau de variations de $f$ et celui de $g$.
2. Calculer $f(3)$ et $g(3)$.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
5. Montrer que : $\forall x \in ]3;+\infty[; g(x) < f(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$
6. En déduire les solutions de l'inéquation : $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$ dans l'intervalle $]1;+\infty[$
7. Résoudre, algébriquement, dans $]1;+\infty[$ l'inéquation : $P(x) > 0$ où $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$.
**(On donne $P(3) = 0$)**



Yassine Elamri



Today better than yesterday, tomorrow better than today