Série d'exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$.

1. Déterminer D_f
2. Etudier la parité de la fonction f (Qu'est ce qu'on peut dire sur la courbe de f)
3. Vérifier que : $(\forall x \in D_f); (f(x))^2 = 4 + \dfrac{16}{x^2-4}$
4. Montre que pour tout x et y de D_f tel que $x \neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{-16(x+y)}{(x^2-4)(y^2-4)} \times \frac{1}{f(x)+f(y)}$$

5. Étudier la monotonie de la fonction f sur $]2;+\infty[$
6. On utilisons la parité de f, déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 2

On considère la fonction définie par $f(x) = x(1-x)$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) \leq \frac{1}{4}$.
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.
3. a. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$.
   b. Écrire f comme composée de fonction carrée et de deux fonctions affines dont on donnera le sens de variation.
   c. On utidions la variation des fonctions précédents, déduire le sens de variation de f.

Exercice 3

Déterminer $g \circ f$ et $D_{g \circ f}$ dans chacun de cas suivants :

1. $g(x) = 3x + 2$ et $f(x) = x^2 - 1$
2. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $f(x) = x^2$

https://ste
Yassine Elamri

3 $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et $f(x) = \sqrt{x}$

4 $g(x) = \dfrac{x-1}{2-x}$ et $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$

1 Donner le tableau de variation de la fonction f et celui de la fonction g.

2 Déterminer la monotonie de la fonction gof sur les deux intervalles :$]-\infty, 0[$;et $]0, +\infty[$

Exercice 5

Soient f et g les fonctions définies par : $g(x) = \dfrac{x}{2x+4}$ et $f(x) = (x+1)^2$

1 Donner le tableau de variations de la fonction f et celui de g .

2 On pose:$\forall x \in \mathbb{R}$: $h(x) = (gof)(x)$

a [illegible] $\forall x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+4x+4}$

b Déterminer la monotonie de la fonction h sur les intervalles suivants: $[-\infty; -1]$ et $[-1; +\infty[$

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions définies par:$f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1 a Donner les tableaux de variations des fonctions f et g .

b Représenter les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c Déterminer graphiquement $g([-1;0])$ et $g([0;+\infty[)$

2 Soit h la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $h(x) = x + 4 - 2\sqrt{x+1}$

a Vérifier que :$(\forall x \in [-1;+\infty[); h(x) = (f \circ g)(x)$

b Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $[-1;0]$ à partir de celle de f et g. Puis déduire les extremums de h sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ s'ils existent .

c Montrer que : $(\forall a \in [-1;+\infty[); \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \dfrac{1}{2}$

https://ste
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-|x|} & ;|x| \leq 2 \\ \dfrac{-2|x|+4}{|x|+1} & ;|x| > 2 \end{cases}$;

1. Montrer que f est paire et que $A(2;0) \in (C_f)$.
2. Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty$ puis donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que f est minorée par 2 sur $\mathbb{R}$. Est-ce que 2 est un minimum de la fonction f ?
   b. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$
4. Représenter la courbe représentative (C_f) de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$
   Représenter la courbe représentative (C_g) de la fonction g dans le même repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
6. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = (f \circ g)(x)$
   a. Déterminer $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$
   b. Étudier la monotonie de la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ à partir de celle des fonctions f et g
   c. Étudier le signe de h

https://ste
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today