Exercice

Étudier la dérivabilité de f au point a dans chacune des cas suivantes

1. $\begin{cases} f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et $a=0$
2. $\begin{cases} f(x)=\sin^2 x E\left(\frac{1}{x}\right) ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ et $a=0$
3. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} ; x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ et $a=1$
4. $\begin{cases} f(x)=\left|x^2-x\right| ; x<0 \\ f(0)=x\sqrt{x} ; x\geq 0 \end{cases}$ et $a=0$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par :

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & 0\leq x<1 \\ ax^2+bx+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

1. déterminer la relation entre a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^+$
2. déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Exercice

Calculer la dérivée de f dans chacune des cas suivantes : 1) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ 2) $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ 3) $f(x)=(1+\sin(2x))^3$ 4) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}+2}$ 5) $f(x)=\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
6) $f(x)=\tan(\sin x)$ 7) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt[3]{3x}}$
8) $f(x)=\sin(\arctan(\pi\sqrt{x}))$

Exercice

1. Soit f une fonction dérivable en a.
   calculer la limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$
2. soit f une fonction dérivable au point $a=2$ Telle que $f(2)=0$ et $f'(2)=3$.
   Calculer les limites

Yassine Elamri

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(\sqrt{x+2})}{x-2} \text{ et } \lim_{x\to 2}\frac{f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}$$

Exercice

On pose $I=\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ et soient x et y deux éléments de I tels que $x<y$

1. montrer que :
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\leq \sin y-\sin x\leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y-x)$$
2. déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12}\leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi}\leq \frac{\sqrt{3}}{12}$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par :

$$f(x)=x\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$$

1. Étudier la dérivabilité à droite au point 0
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
4. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
5. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$vers un intervalle I à déterminer
6. Tracer (C_f) et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-2;2[$
2. On pose g la bijection réciproque de f

Yassine Elamri

a Montrer que g est dérivable en 1 et calculer $g'(1)$

b Étudier la dérivabilité de g sur $]-2;2[$

c Montrer que $g'(x)=\dfrac{2-x}{\sqrt{(g(x))^2+g(x)+1}}$ pour tout $x\in]-2;2[$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $I=]0;\pi[$ par $f(x)=\cos(x)$

1 a) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que $(\forall x\in J):\quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

2 Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(x)=f^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

a Montrer que $D_\varphi=[0;+\infty[$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

b Étudier la dérivabilité de φ à droite au point 0 et interpréter géométriquement le résultat

c Montrer que φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $(\forall x\in]0;+\infty[):\quad \varphi'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

d Dresser le tableau de variation de φ puis tracer $\left(C_\varphi\right)$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ tel que $f(0)=0$ et $f(1)=1$

1 Montrer que $\exists c\in]0;1[:\ f'(c)=2c$

2 Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x$

3 Montrer que $(\exists c\in]0;1[):2cf'(c)=\sqrt{c}$

Exercice

1 a et b deux nombre réels tels que $0<a<b$;
Montrer que :

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan(b)-\arctan(a)<\frac{b-a}{1+a^2}$$

Yassine Elamri

2 En déduire que $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\arctan\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$

Exercice

1 En utilisant le T.A.F, montrer que

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad \frac{1}{1+x^2}<\frac{\arctan(x}{x}\Big)<1$$

2 En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)-x}{x^2}$

Exercice

Partie A) : On considère la fonction : $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-1\right)$

1 Montre que $(\exists!\alpha\in]\frac{-1}{2},0[),\quad f(\alpha)=\alpha$

2 Montre que $(\forall x\in]\frac{-1}{2},0[),|f'(x)|\leq\frac{1}{4}$

3 On déduire que : $(\forall(x,y)\in]\frac{-1}{2},0\left[^2\right),\quad |f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{4}|x-y|$

Partie B) : On considère la suite : $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)\end{cases}$

1 Montrer que $\forall n\in IN\quad \frac{-1}{2}<u_n\leq 0$

2 Montrer que

$$\forall n\in IN\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$

3 En déduire que (u_n) est convergente, et calculer sa limite.

Exercice

Soit f définie par $\begin{cases}f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x^2+x}\text{ si }x\leq -1\\ f(x)=\dfrac{\arctan(x+1)}{x+1}\text{ si }x>-1\end{cases}$

1 Étudier les branches infinies de $\left(C_f\right)$

Yassine Elamri

2. Étudier la continuité en $x_0 = -1$
3. Étudier la dérivabilité à gauche au point $x_0 = -1$ et interpréter géométriquement le résultat.
4. Montrer que $(\forall t > 0) \quad t - \frac{t^3}{3} < \arctan(t) < t$
   a. Étudier la dérivabilité à droite au point $x_0 = -1$ et interpréter géométriquement le résultat
5. a- Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et sur $]-\infty;-1[$ puis calculer $f'(x)$
   a. Étudier les variations de la fonction définie par $g(t) = \frac{t}{1+t^2} - \arctan(t)$ puis déterminer son signe
   b. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer la courbe de f

Exercice

1. Soit f la fonction définze sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (\sin(x))(1+\cos(x))$$

.

2. Montrer que f est périodique de période 2π.
3. a) Étudier la parité de f.
   a. Déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $D_E = [0,\pi]$
4. a) Montrer que pour tout x de $[0,\pi]$ on'a

$$f'(x) = (1+\cos(x))(2\cos(x)-1)$$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. Tracer la courbe (C_f) dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$.

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$

Yassine Elamri