Chapitre

Étude de fonctions

I Étude de fonctions

1 Rappel :

a La parité :

D Définition

- f est paire $\Longleftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in D_f) : -x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(-x) = f(x) \end{cases}$
- f est impaire $\Longleftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in D_f) : -x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

b Les éléments de symétrie

D Définition

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f); 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f); f(2a-x) = f(x) \end{cases}$
- Le point $I(a;b)$ est centre de symétrie de (C_f) si et seulement si : $\begin{cases} (\forall \in D_f); 2a - x \in D_f \\ (\forall \in D_f); f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

Exemple

1 La droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - x + 1.$$

On a $D_f = \mathbb{R}$.

En effet :

- On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 \times \dfrac{1}{2} - x = 1 - x \in \mathbb{R}$

Yassine Elamri

• On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\left(2\times\frac{1}{2}-x\right) &= f(1-x)\\ &= (1-x)^2-(1-x)+1\\ &= 1-2x+x^2-1+x+1\\ &= x^2-x+1\\ &= f(x) \end{aligned}$$

2 Le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de la fonction g définie par : $g(x)=-x^3+3x+2$.
En effet :

• On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $2\times 0-x=-x\in\mathbb{R}$

• On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(2\times 0-x) &= g(-x)\\ &= -(-x)^3+3(-x)+2\\ &= x^3-3x+2\\ &= 4-(-x^3+3x+2)\\ &= 4-g(x) \end{aligned}$$

Application

1 Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$. Montrer que la droite d'équation $x=2$ est un axe de symétrie de (C_f).

2 Soit f la fonction définie par : $f(x)=2x-3-\dfrac{3}{x+2}$. Montrer que le point $\Omega(-2;-7)$ est un centre de symétrie de (C_f).

2 Branches infinies

D Définition

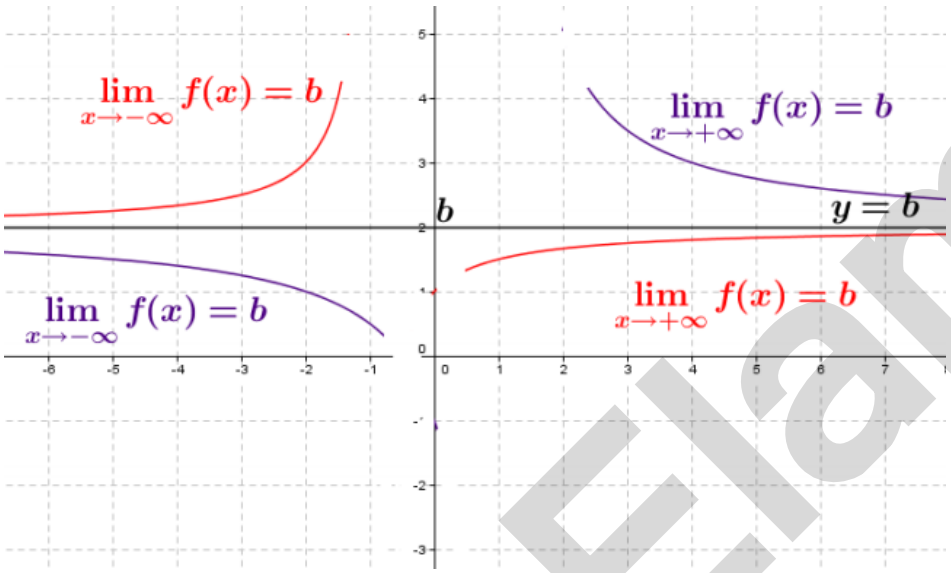
Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f et $M(x,f(x))$ un point de (C_f). On dit que (C_f) admet une branche infinies si l'une au moins des coordonnées de M tend vers l'infini.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ **alors** la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontal à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de ∞.



Exemple

On considère la fonction f définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

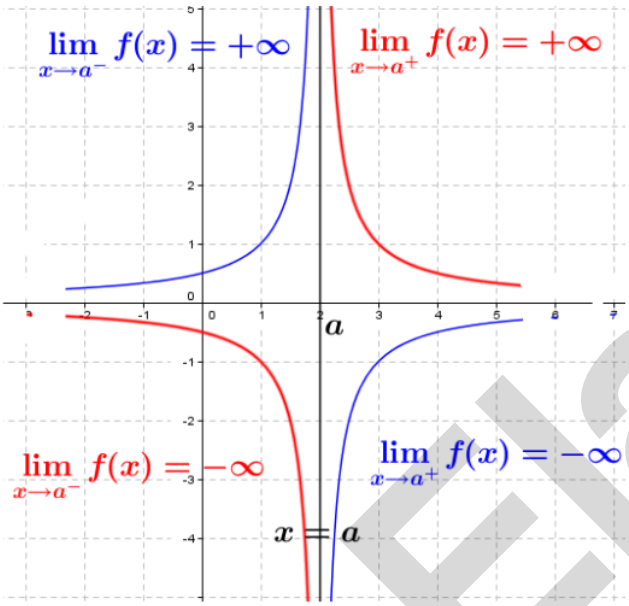
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote horizontal d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ **alors** la droite d'équation $x = a$ est une asymptote vertical à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage a.



Exemple

On considère la fonction f définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

On a $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote vertical d'équation $x = 2$ à droite en 2.

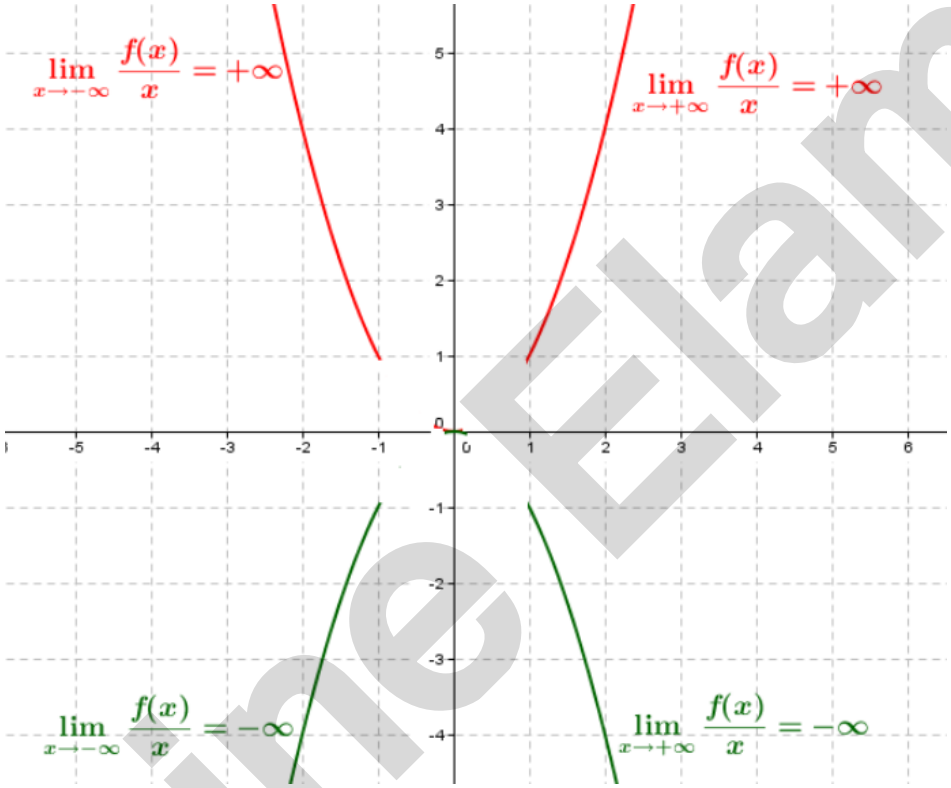
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

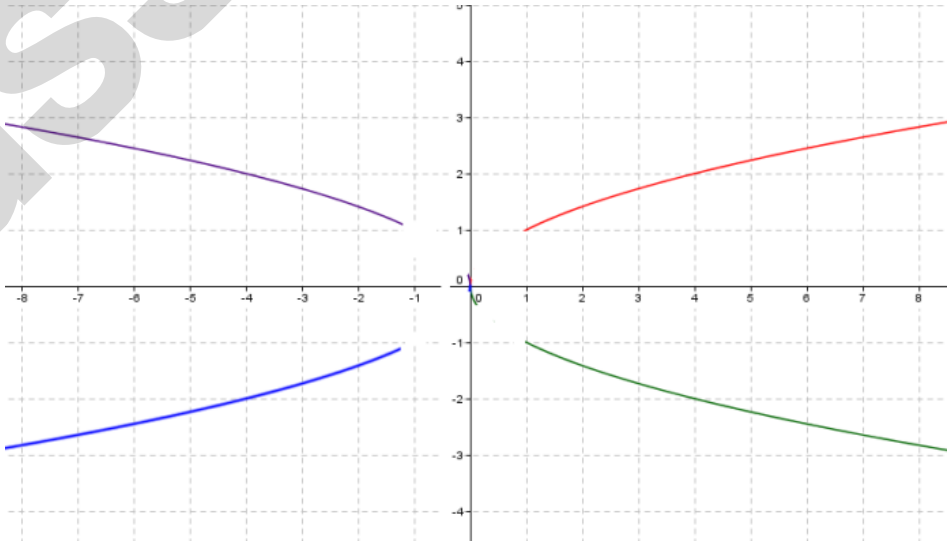
Propriété

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ **alors** on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Trois cas ce présents :

1 **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ **alors** $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞.



2 **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ **alors** $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞.



3 **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$ **alors** on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax$. Deux cas se présents :

a **Si** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$ **a** e parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de ∞.

https://steinmath.com

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on calcul donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, par suite on calcul $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = +\infty$.

D'où $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.

1. Déterminer D_f
2. Étudier la branche infinie de (C_f) en $-\infty$.

Yassine Elamri

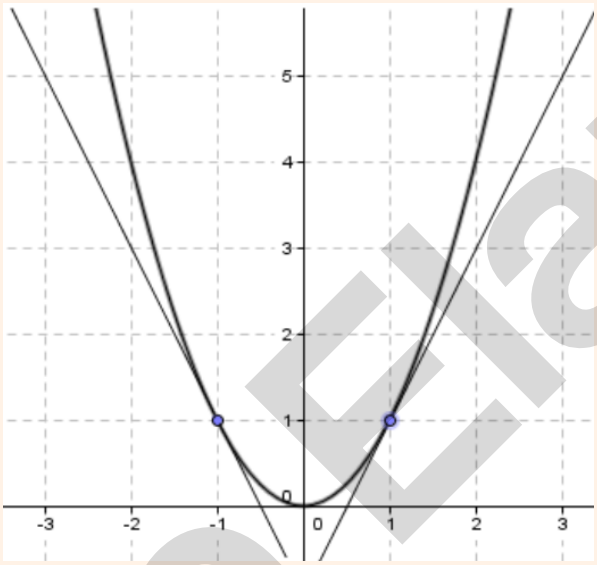
Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Concavité d'une fonction

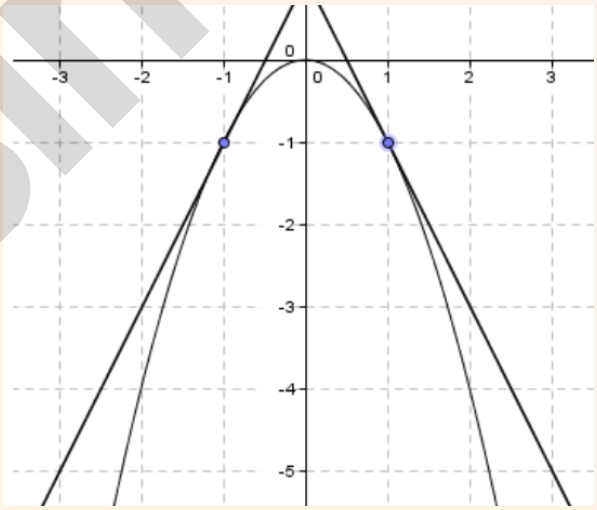
D Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

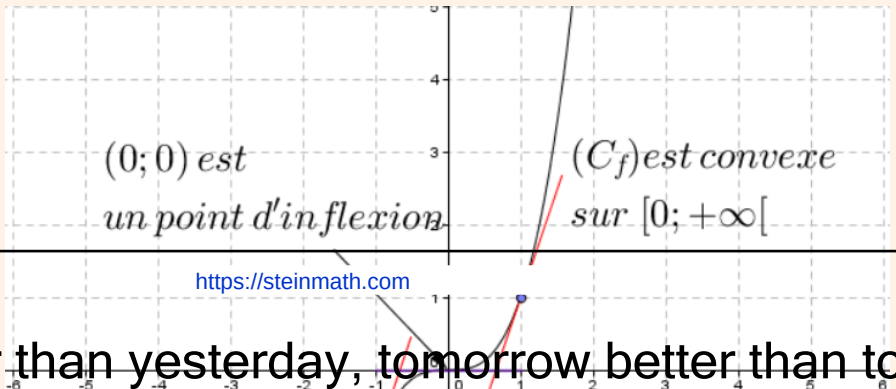
1 On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative (C_f) est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.



2 On dit que f est concave sur I si sa courbe représentative (C_f) est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.



3 Un point où la courbe (C_f) traverse sa tangente s'appelle un point d'inflexion de (C_f).



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

1. Si $f''(x) > 0$ sur I, alors on dit que (C_f) est convexe.
2. Si $f''(x) < 0$ sur I, alors n dit que (C_f) est concave.
3. Si f'' s'annule en a et change de signe, alors on dit que $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion pour (C_f).

Application

On considère la fonction définie sur $I = [0; \pi]$ par : $f(x) = \cos(x)$. Étudier la concavité de (C_f) sur I et vérifier que (C_f) possède un point d'inflexion K dont on détermine ses coordonnées.

II Plan d'étude d'une fonction

1. Ensemble de définition.
2. La parité d'une fonction.
3. Élément de symétrie.
4. Limites aux bornes.
5. Dérivabilité.
6. Tableau de variation.
7. Les branches infinies.
8. La convexité et points d'inflexions.
9. Intersections avec les axes.
10. La représentation graphique.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today