Chapitre

Dérivation

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
- On rappellera la notion de dérivation et ses applications à travers des activités variées mettant en évidence son importance dans létude locale et globale des fonctions au programme, et surtout dans lapproximation locale dune fonction , létude du sens de variation dune fonction sur un intervalle , la détermination des extremums , létude du signe dune fonction ou dune inégalité algébrique sur un intervalle ou la concavité de la courbe dune fonction numérique,on rappellera à cette occasion la propriété caractéristique dune fonction constante ou strictement monotone sur un intervalle. - On introduira l'écriture différentielle $dy = f'(x)dx$, adoptée en physique. - L'étude des fonctions de la forme :$x \to \sqrt[n]{u(x)}$ avec $(n \geq 3)$ et u fonction positive est hors programme, on se limitera à la détermination de leurs dérivées.	- Maitriser le calcul des dérivées des fonctions. - Déterminer le signe dune fonction à partir de son tableau de variation ou de sa représentation graphique. - Étudier des fonctions irrationnelles et des fonctions trigonométriques et des fonctions composées et les représenter graphiquement. - Déterminer la monotonie de la fonction réciproque dune fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle et la représenter graphiquement . - Déterminer le nombre dérivé en un point de la fonction réciproque dune fonction.

Yassine Elamri

Les prés-requis	Les extensions
► L'ordre dans $\mathbb{R}$ ► Généralités sur les fonctions numériques ► limite d'une fonction numérique	► Théorème de rolle et T.A.F ► Études de fonctions ► Calculs d'intégrales et de primitives ► Les équations différentielles ► Mécanique du point

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Avant propos

Le mathématicien français d'origine italienne Joseph Lagrange a consacré de nombreux travaux à l'étude de fonctions. C'est à lui que l'on doit les termes de dérivée et de primitives. Il considérait en effet que la première dérivait de la seconde considérée elle-même comme la fonction première, donc la primitive. Lagrange s'est penché sur presque tous les domaines des mathématiques. Citons seulement ses travaux en mécanique céleste et ceux sur les équations différentielles.

I Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels)

1 Dérivabilité d'une fonction en un point

Activité

Déterminer $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dans les cas suivants :

1. $f(x)=x^2+2022x-2023$; $x_0=1$
2. $f(x)=x+\arctan(\sqrt{x+3})$; $x_0=0$
3. $f(x)=\sqrt{4x+1}$; $x_0=2$
4. $f(x)=\sqrt[3]{5x-7}$; $x_0=3$

Définition

Soit f ure fonction numérique définie sur I et $x_0\in I$, on dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel l tel que : $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$

Le nombre l est appelé le nombre dérivée de f en x_0, il est noté $f'(x_0)$.

Si on pose $h=x-x_0$, on aura $f'(x_0)=\lim_{h\to\infty}\dfrac{f(x_0+h)-f(z_0)}{h}$

Définition

Soit f une fonction dérivable en x_0.

La droite (T) d'équation $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est appelé la tangente à la courbe C_f de la fonction f an point d'abscisse x_0.

La fonction $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ s'appelle l'approximation affine de f an voisinage de x_0.

on écrit $f(x)\simeq g(x)$ an voisinage de x_0.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Proposition

Soit f une fonction numérique sur I ouvert et $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un nombre $l \in \mathbb{R}$ et une fonction φ tel que : $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0) \cdot \varphi(x)$

et $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$

Dans ces conditions $f'(x_0) = l$.

Application

Soit f la fonction définie pur $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 8}$

1. Justifier que f est dérivable en 0 .
2. En déduire une approximation affine de l'expression $\sqrt[3]{x^3 + 8}$ an voisinage de 0
3. Déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{8,004}$ et $\sqrt[3]{7,0995}$

2 Dérivabilité à droite-dérivabilité à gauche

Définition

✓ Soit f une fonction définie sur un intervalle $[x_0; x_0 + \alpha[, \alpha > 0$:

On dit que f est dérivable à droite de x_0 s'il existe un réel l_1 tel que $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$.

Le nombre l_1 est appelé le nombre dérivé de f à droite de x_0 il est noté $f'_d(x_0)$ et on écrit $l_1 = f'_d(x_0)$.

✓ Soit f une fonction définie sur un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0]; \alpha > 0$:

On dit que f est dérivable à gauche de x_0 s'il existe un réel l_2 tel que $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$

Le nombre l_2 est appelé le nombre dérivé de f à gauche de x_0 il est noté $f'_g(x_0)$ et on écrit $l_2 = f'_g(x_0)$.

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur I ouvert et $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0 si et seulement si elle at dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(n_0) = f'_g(x_0)$, on a donc $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Application

En utilisant la définition étudier la dérivabilité de f en x_0 dans chacun des cas suivants

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{sin(x)}{\sqrt{x}}\ ; & x>0 \\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}\ ; & x\leq 0 \end{cases}$; $x_0=0$

2 $\begin{cases} f(x)=\arctan(x\sqrt{x})\ ; & x\geq 0 \\ f(x)=\sqrt{x^2-x}\ ; & x<0 \end{cases}$; $x_0=0$

3 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x+\sin x}\ ; & x>0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{2}E\left(\dfrac{1}{2x}\right)\ ; & x<0 \\ f(0)=0 \end{cases}$; $x_0=0$

4 $\begin{cases} f(x)=(x-2023)^2\cos\left(\dfrac{1}{x-2023}\right)\ ; & x>2023 \\ f(x)=\arctan\left(\sqrt{-x+2023}\right)\ ; & x\leqslant 2023 \end{cases}$; $x_0=0$

Remarque

Si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 $f'_d(x_0)\neq f'_g(x_0)$, alors on dit que le point $A(a;f(a))$ est anguleux.

3 La dérivabilité et l'interprétation graphique

1 Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\neq 0$ alors f est dérivable en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente au point $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ de coefficient directeur a. **(Voir la figure 1)**

L'équation réduite de cette tangente est : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

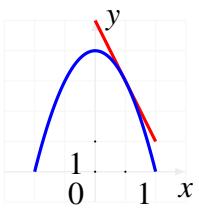


Figure 1

2 Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ alors f est dérivable en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A\left(x_0,f(x_0)\right)$. **(Voir la figure 2)**

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

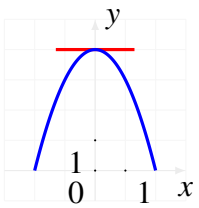


Figure 2

3 Si $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\neq 0$ alors f est dérivable à droite en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente au point $A\Big(x_0,f(x_0)\Big)$ de coefficient directeur a.**(Voir la figure 3)**

L'équation réduite de cette demi-tangente est : $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ et $x\geq x_0$.

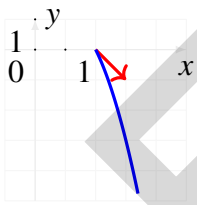


Figure 3

4 Si $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ alors f est dérivable à droite en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A\Big(x_0,f(x_0)\Big)$.**(Voir la figure 4)**

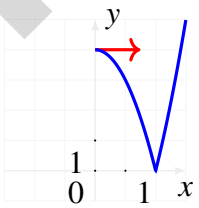


Figure 4

5 Si $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x=x_0$ au point $A\Big(x_0,f(x_0)\Big)$ orientée vers le bas.**(Voir la figure 5)**

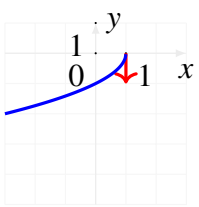


Figure 5

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

6 Si $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x=x_0$ au point $A\Big(x_0,f(x_0)\Big)$ ori haut.**(Voir la figure 6)**

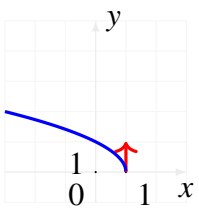


Figure 6

7 Si $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\neq 0$ alors f est dérivable à gauche en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente au point $A\Big(x_0,f(x_0)\Big)$ de coefficient directeur a.**(Voir la figure 7)**

L'équation réduite de cette demi-tangente est : $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ et $x\leq x_0$.

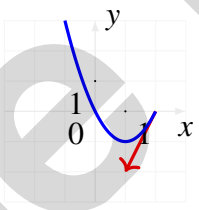


Figure 7

8 Si $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ alors f est dérivable à gauche en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A\Big(x_0,f(x_0)\Big)$.**(Voir la figure 8)**

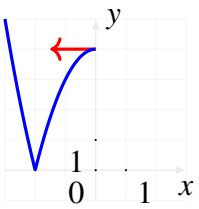


Figure 8

9 Si $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ alors f n'est pas dérivable à gauche en x_0 et $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x=x_0$ au point $A\Big(x_0,f(x_0)\Big)$ orientée vers le haut.**(Voir la figure 9)**

Yassine Ela

https://steinmath.com rday, tomorrow better than today



htt

♦ f est dérivable sur $]a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$ et dérivable à gauche en b

♦ f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et à

https://steinmath.com better than yesterday, tomorrow better than today

gauche en b

5 Dérivées de fonctions usuelles

Propriété

Le tableau ci-dessous résume les dérivées de quelques fonction usuelles :

La fonction f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$
$f(x)=a$	$f'(x)=0$	D_f
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	D_f
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$	$f'(x)=nx^{n-1}$	D_f
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{Z}^*-\{1\})$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	D_f
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	D_f
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	D_f
$f(x)=\tan(x)$	$f'(x)=1+\tan^2(x)$	D_f
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$	D_f
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$	D_f
$f(x)=\tan(ax+b)$	$f'(x)=a\left(1+\tan^2(ax+b)\right)$	D_f

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

6 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

➔ Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les fonctions $f+g$; $f \times g$; λf sont dérivables sur I .

➔ Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f'+g'$
$\alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	I	$\alpha f'$
$(f \times g)$	I	$f' \times g + g' \times f$
$\sqrt{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I / f(x) > 0\}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\frac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I / f(x) \neq 0\}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\left(\frac{f}{g}\right)$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I / g(x) \neq 0\}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
$f^n (n \in \mathbb{N} - \{0,1\})$	I	$nf^{n-1} \times f'$
$\frac{1}{f^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I / f(x) \neq 0\}$	$-nf^{-n-1} \times f'$

Application

Calculer $f'(x)$ pour chacun des fonctions suivantes :

1 $f(x) = cos(3x-1) - \frac{x}{(x+1)^2+1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$

2 $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1} \quad , x < 0$

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Compléments sur la dérivation

1 Dérivation et continuité

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur I ouvert et $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0 si et seulement si elle at dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(n_0) = f'_g(x_0)$, on a donc $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur I ouvert et $x_0 \in I$, si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Résultat : Soit f une fonction numérique définie sur I ouvert et $x_0 \in I$, si f n'est pas continue en x_0 alors f n'est pas dérivable en x_0.

Remarque

La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple $x \mapsto |x|$ est continue en O mais n'est pas dérivable en O.

2 Dérivabilité des fonctions composées

Activité

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$ par : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{cos}(\mathbf{x}); \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x^2} - \mathbf{2x}$

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$
2. Calculer $\mathbf{f'}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g'}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$
3. Soit$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{gof}(\mathbf{x})$ Déterminer $h(x)$ puis calculer $\mathbf{h}(x)$
4. Comparer $\mathbf{h'}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{f'}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g'}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Corollaire :

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$, pour tout x de I .

• Exemple

Calculons $h'(x)$ le dérivée de fonction suivante : $h(x) = \sin(x^2 - 4x + 1)$:

En posant $g(x) = \sin(x)$ et $f(x) = x^2 - 4x + 1$, on aura pour $x \in \mathbb{R}$: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{gof}(\mathbf{x})$ Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ Et g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction h est dérivable sur **IR** et de plus, Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\sin(x^2 - 4x + 1))' \\ &= (x^2 - 4x + 1)' \times \sin'(x^2 - 4x + 1) \\ &= (2x - 4) \times \cos(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

Application

1. Montrer que la fonction $u : x \to cos(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déterminer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction $v : \mathbf{x} \to sin(\sqrt{\mathbf{x^2 + 5}})$ dérivable $\mathbb{R}$ puis déterminer sa dérivée.

3 Dérivée de la fonction réciproque

Activité

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, x \geqslant 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [2, +\infty[$.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]2, +\infty[$ puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

4 Vérifier que pour tout $x \in]2,+\infty[$: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, a un réel de I .

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Corollaire :

Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et pour tout $x \in f(I)$, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

• Exemple

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^3 + x + 3$

1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur un intervalle J que l'on déterminera

2 Montrer que $\mathbf{f}^{-1}$ est dérivable en 5 et déterminer $\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(5)$

Solution :

1 La fonction f est continue sur IR car c'est une polynôme La fonction f est dérivable sur IR, et pour tout x dans IR on a :

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}^2 + 1 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur IR

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur J et :

$J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[) =]\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f}(\mathbf{x}); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

2 On remarque $f(1) = 5$ donc $f^{-1}(5) = 1$

On a la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4 \neq 0$

Donc $\mathbf{f}^{-1}$ est dérivable en 5 ; et on a : $\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(5) = \dfrac{1}{f'(5)} = \dfrac{1}{4}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Soit $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x, \quad x\in\mathbb{R}$

1 Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

2 Soit $g(x)=x^3-3x-3, x\in[1,+\infty[$.

a Montrer que g admet une fonction réciproque puis déterminer son ensemble de définition.

b Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$.

c Montrer que $\alpha=\sqrt[3]{3\alpha+3}, \left(g^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{3\left(\alpha^2-1\right)}$.

4 Dérivée de la fonction Arc tangente

Proposition

La fonction x $\to$ arctan x est dérivable sur $\mathbb{R}$ on a

$$(\forall x\in\mathbb{R}); \left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{x}^2}$$

Exemples

Pour tout $x\in]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$, on pose $f(x)=\tan x$,

f est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$, et pour tout $x\in]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$,

On a : $\mathbf{f}'(x)=1+\tan^2 x$

Comme f' ne s'annule pas sur $]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$ donc $f^{-1}=\arctan$ est dérivable sur $f(]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[)=\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$; on a :

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{f}^{-1}\right)'(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mathbf{f}'\left(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})\right)}\\ &= \frac{1}{\mathbf{f}'(\arctan\mathbf{x})}\\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan\mathbf{x})}\\ &= \frac{1}{1+\mathbf{x}^2}\end{aligned}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Proposition

Soit x $\to \mathbf{u}(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle I alors on a, la fonction $x \to \arctan(u(x))$ est dérivable sur I

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$\arctan'(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \frac{\mathbf{u}'(\mathbf{x})}{\mathbf{1}+\mathbf{u}^{\mathbf{2}}(\mathbf{x})}$$

• Exemple

On considère la fonction définie par : $f(x) = \arctan\left(x^2+1\right)$, montrons que f est dérivables sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$

On considère la fonction définie par : $f(x) = \arctan\left(x^2+1\right)$, f est dérivables sur $\mathbb{R}$, car la fonction $u : x \to x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus $\forall x \in \mathbb{R} : u'(x) = 2x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$; on $a : f'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

Application

Calculer $f'(x)$ pour chacun des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{x}{(x+1)^2+1}, x \in \mathbb{R}-\{1\}$
2. $f(x) = x \cdot \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x-1}\right), \quad x \in \mathbb{R}-\{1\}$
3. $f(x) = \dfrac{4}{\pi} \cdot \text{Arctin}\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right), x < 0$

Exercice

1. Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[); \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$
2. Montrer que ; $(\forall x \in]-\infty;0[); \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

5 Dérivée de la fonction Racine n-ième

a) Dérivée de la fonction x $\to \sqrt[n]{\mathbf{x}}$

Yassine Elamri

Activité

Soit **n** un entier naturel supérieur ou égal à 2

Considérons la fonction u définit sur $[0;+\infty[$ par $u(x)=\sqrt[n]{x}$

1 Étudier la dérivabilité de u à droite de 0

2 Calculer la dérivée de la fonction u

Proposition

La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur IR_*^+

Et on a pour tout $x \in \mathbf{IR}_*^+$:

$$(\sqrt[n]{\mathbf{x}})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{\mathbf{x^{n-1}}}}$$

b) Dérivée de la fonction $x \to x \to \sqrt[n]{\mathbf{f(x)}}$

Proposition

Si f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I,

Alors la fonction $x \to \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$(\sqrt[n]{\mathbf{f}})'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{n} \times (\sqrt[n]{\mathbf{f(x)}})^{\mathbf{n-1}}}$$

• Exemple

Montrons que f est dérivable sur son domaine de définition puis calculer sa dérivée de chacune des cas suivantes :

1 $\mathbf{f(x)} = \sqrt[4]{\mathbf{x^5}}$:On a la fonction $u : x \mapsto \quad x^5$ est dérivable et strictement positive sur $]0;+\infty[$, de plus $u'(x) = 5x^4$

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{5x^4}{4\sqrt[4]{(x^5)^3}} = \frac{5x^4}{4\sqrt[4]{x^{15}}}$$

2 $f(x) = \sqrt[4]{1+\cos^2(x)}$: On a la fonction $u : x \mapsto \quad 1+\cos^2(x)$ est dérivable et strictement

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

positive sur $\mathbb{R}$, de plus $u'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$ Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2(x))^3}} = \frac{-\sin(x)\cos(x)}{2\sqrt[4]{(1+\cos^2(x))^3}}$$

Application

Étudier la dérivabilité de f dans son ensemble de définition et déterminer sa dérivée dans chacun des cas suivants :

$f(x) = \sqrt[3]{x}\arctan(\sqrt{x})$; $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

$f(x) = x - 2\sqrt[3]{x-1}$; $f(x) = |2x+3|^{\frac{3}{4}}$

Yassine Elamri