ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juin 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales PC et SVT**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices et problème :

- Exercice 1 : **Suite numériques** ..... **2,5 points**
- Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Calcule des probabilités** ..... **3 points**
- Problème : **Etude d'une fonction numérique et Calcule intégrale** . **8,5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2,5 pts)

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$.

0,75 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$.

0,5 pt **a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son première terme.

0,5 pt **b)** Ecrire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

0,25 pt **c)** Calculer la somme $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots\cdots + \mathcal{U}_{2021}$.

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R = 3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

0,25 pt **1 - a)** Calculer la distance ΩA.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

0,25 pt **c)** Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S).

0,5 pt **2 -** Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $M_a \in \mathbb{R}$.

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

0,5 pt **b)** Montrer que $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$

0,5 pt **c)** Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Exercice 3 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$.

0,25 pt **1 -** Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$.

0,5 pt **2 -** Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de point B par h.

0,5 pt **3 -** On considère la rotation R de center C d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R.

4 - Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

Yassine Elamri

0,25 pt **a)** Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) \equiv \pi[2\pi]$.

0,5 pt **c)** Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF.

0,5 pt **d)** Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient trois boules blanches, et quater boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Soient les événements :

1 - On considère les événements suivantes : A : "Obtenir exactement deux boules rouges"
B :" Obtenir exactement une boule verte"

0,75 pt **a)** Montrer que : $P(A) = \frac{12}{55}$ et $P(B) = \frac{21}{44}$

0,75 pt **b)** Calculer $P(A/B)$: la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé.Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2 - Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

1 pt **a)** Déterminé la loi de la de probabilité X.

0,5 pt **b)** calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

Problème : (8,5 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis détermine la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **b)** Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement .

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f.

0,5 pt **4 - a)** Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

1 pt **5 - a)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \simeq 1,6$ et $e^2 \simeq 7,2$)

0,5 pt **b)** En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$

6 - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g est paire .

0,5 pt **b)** Construire $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pt **7 - a)** On pose $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1)dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \dfrac{6 - e^5}{25}$.

0,5 pt **b)** On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$. Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.

0,5 pt **c)** Déduire que $\int_1^e f(x)dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$.

0,5 pt **d)** Calculer l'aire du domine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

FIN

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today